

Alte Logik-Klausur

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

1 (6)	2 (8)	3 (8)	4 (8)	5 (10)	6 (9)	7 (12)	8 (10)	9 (11)		Σ (82)	Note

WICHTIG

- Die Klausur ist umfangreich. Dafür sind die geforderten Punktzahlen für die Noten aber entsprechend niedriger.
- Es gibt keine Minuspunkte; also bei Unsicherheit am Ende bitte mindestens auf Verdacht markieren bzw. eintragen!
- Hinten ist Platz für Notizen bzw. Neuberechnungen. Bitte ggf. ungültig Gewordenes streichen.

1. AL, Wahrheitstafel

(6 Punkte)

Vervollständigen sie die folgende Wahrheitstafel für $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$:

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$B \vee C$	$A \rightarrow (B \vee C)$	$\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$
W	W	W	F	F	W	W	W	W
W	W	F	F	F	W	W	W	W
W	F	W	W	W	F	W	W	W
W	F	F	W	W	F	F	F	W
F	W	W	F	F	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W	W	W
F	F	F	W	F	W	F	W	W

2. AL, Semantische Begriffe

(8 Punkte)

Wenn φ die Eigenschaft in Spalte 1 hat und ψ hat die Eigenschaft in Spalte 2, hat dann die Formel in Spalte 3 die angegebene Eigenschaft?

Bitte antworten Sie jeweils in Spalte 4 entweder

- IMM, wenn dies immer der Fall ist,
- NIE, wenn dies nie der Fall ist,
- ABH sonst (wenn das also von φ und ψ abhängt, d.h. die Formel in Spalte 3 die Eigenschaft in manchen Fällen hat, in manchen Fällen nicht.)

Tipps:

Denken Sie an einfache Beispiele für φ und ψ : $A, B, \neg A, \neg B, A \wedge \neg A, A \vee \neg A$.

Widerlegbares kann unerfüllbar sein, Erfüllbares kann allgemeingültig sein.

	1 Wenn φ ... ist	2 und ψ ist ... ,	3 ist dann ...	4 Antwort
a)	allgemeingültig	unerfüllbar	$\varphi \wedge \psi$ erfüllbar?	NIE
b)	allgemeingültig	erfüllbar	$\varphi \wedge \psi$ kontingent?	ABH
c)	allgemeingültig	widerlegbar	$\varphi \wedge \psi$ widerlegbar?	IMM
d)	kontingent	erfüllbar	$\varphi \rightarrow \psi$ erfüllbar?	IMM
e)	allgemeingültig	kontingent	$\varphi \vee \psi$ kontingent?	NIE
f)	kontingent	erfüllbar	$\neg \varphi \rightarrow \psi$ erfüllbar?	IMM
g)	widerlegbar	erfüllbar	$\varphi \leftrightarrow \psi$ kontingent?	ABH
h)	unerfüllbar	allgemeingültig	$\neg \varphi \rightarrow \psi$ allgemeingültig?	IMM

Erläuterungen:

- a) $T \vee \perp \equiv T$, ist allgg., also erfb.
- b) $T \wedge T \equiv T$, ist allgg., also nicht kont., $T \wedge A \equiv A$, ist kont.
- c) Wo ψ F ist, ist $\varphi \wedge \psi$ auch F.
- d) Wo φ F ist, ist $\varphi \rightarrow \psi$ W.
- e) $T \vee \psi \equiv T$, also nicht kont.
- f) Wo φ T ist, ist $\varphi \rightarrow \psi$ W.
- g) $A \leftrightarrow A$ ist allgg., also nicht kont., $A \leftrightarrow B$ ist kont.
- h) ... $\rightarrow \psi$ ist immer W, wo ψ W ist.

3. AL, KNF-Umformung, Allgemeingültigkeit von KNF (5+3 Punkte)

- a) Formen Sie $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$ per syntaktischer Umformung gemäß Vorlesung Schritt für Schritt in eine äquivalente KNF-Formel um.

Tipp: Das Distributivgesetz funktioniert auch so: $(\varphi \wedge \psi) \vee \rho = (\varphi \vee \rho) \wedge (\psi \vee \rho)$.

$$\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$$

$$\begin{aligned} & \neg\neg(A \wedge \neg B) \vee (A \rightarrow (B \vee C)) \\ & (A \wedge \neg B) \vee (A \rightarrow (B \vee C)) \\ & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (B \vee C)) \\ & (A \vee (\neg A \vee (B \vee C))) \wedge (\neg B \vee (\neg A \vee (B \vee C))) \\ & (A \vee \neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee B \vee C) \end{aligned}$$

- b) Erklären Sie überzeugend*, warum die Formel $(A \vee \neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee B \vee C)$ allgemeingültig ist.

*) Also mehr als nur „weil sie immer wahr ist“, sondern warum das der Fall ist.
Tipp: Dafür hatten wir einen besonderen Satz kennengelernt.

Die KNF-Formel ist allgemeingültig, weil in jeder ihrer Klauseln zwei gegensätzliche Literale stehen.

(Immer muss eines von diesen, und dadurch die ganze Klausel*, wahr sein.)

*) Faustregel: Mit ODER kann's nur wahrer werden (mit UND nur falscher).

4. AL, Resolution

(4+4 Punkte)

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von $(\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B) \vee \neg C \vee (C \wedge B)$, indem Sie die Negation dieser Formel nach den Gesetzen von de Morgan

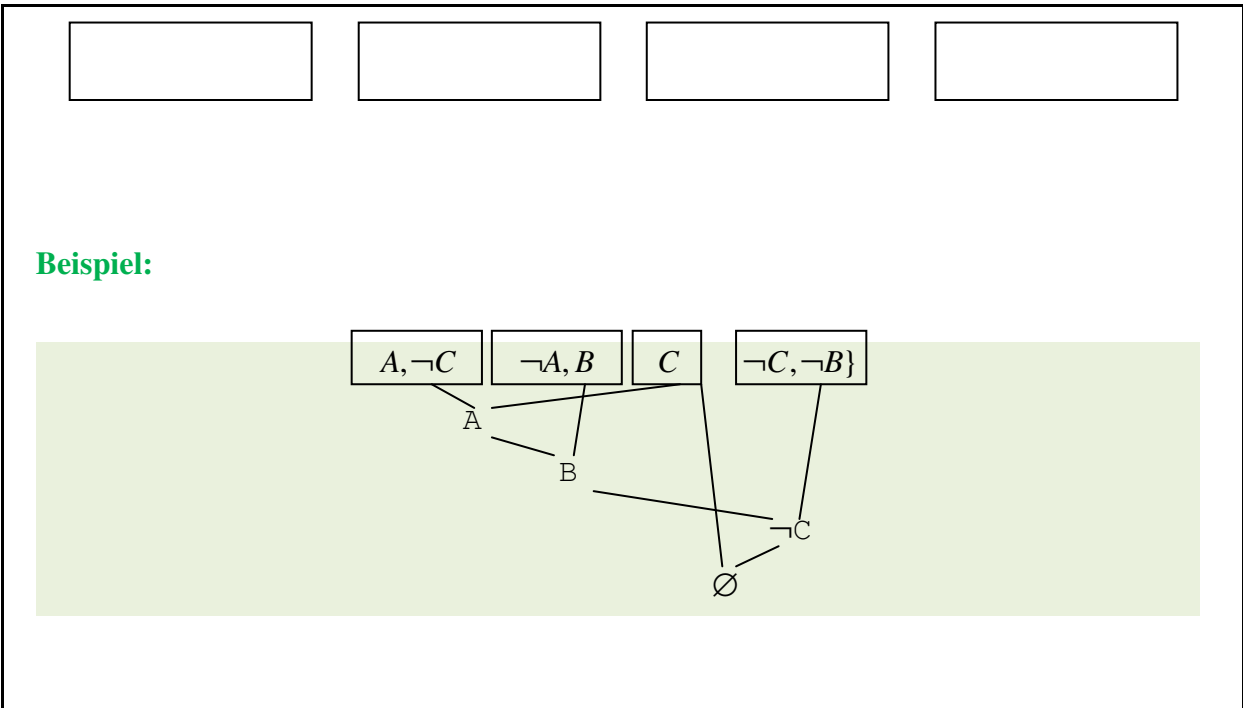
- (1. Negation der \vee -Kette,
2. Negation der \wedge -Ketten,
3. Mehrfachnegationen beseitigen)

in eine äquivalente KNF umformen und auf die so erhaltene Formel (in KNF-Mengenform) Resolution anwenden.

a) KNF-Umformung

$$\begin{aligned} & \neg((\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B) \vee \neg C \vee (C \wedge B)) \\ & \equiv \neg(\neg A \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg\neg C \wedge \neg(C \wedge B) \\ & \equiv (\neg\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg\neg B) \wedge C \wedge (\neg C \vee \neg B) \\ & \equiv \{A, \neg C\}, \{\neg A, B\}, \{C\}, \{\neg C, \neg B\} \}_{KNF} \end{aligned}$$

b) Resolution



5. AL, Tableauverfahren

(10 Punkte)

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit von $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$, indem Sie mit der Tableaubaum-Methode zeigen, dass die Negation $\neg[\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))]$ unerfüllbar ist.

- Schreiben Sie immer links vom Knoten eine *laufende Nummer* und rechts davon, von welchem Knoten er mit einer Tableauregel *herkommt*.
- Kennzeichnen Sie abgeschlossene (widersprüchliche) Zweige durch X.

(1)	$\neg[\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))]$	
(2)	$\neg(A \wedge \neg B)$	(1)
(3)	$\neg(A \rightarrow (B \vee C))$	(1)
(4)	A	(3)
(5)	$\neg(B \vee C)$	(3)
(6)	$\neg B$	(5)
(7)	$\neg C$	(5)
(8)	$\neg A$ X	(2)
(9)	$\neg\neg B$	(2)
(10)	B X	(9)

Alternative (Beispiel):

(3)	$\neg(A \rightarrow (B \vee C))$	(1)
(4)	$\neg A$	(2)
(5)	$\neg\neg B$	(2)
(6)	A	(3)
(7)	B	(5)
(8)	$\neg(B \vee C)$	(3)
(9)	A	(3)
(10)	$\neg(B \vee C)$	(3)
(11)	$\neg B$	(10)
(12)	$\neg C$	(10)
	X	

6. ML, modale Formeln, PLTL, ω -reguläre Ausdrücke, Büchi-Automaten (9 Punkte)

Wir betrachten jetzt ausschließlich Folgen von Situationen, in denen genau eines von a , b oder c gilt, d.h. $\mathbf{G}((a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c))$ und für alle anderen Aussagevariablen P gilt: $\mathbf{G}\neg P$.

Nun seien wie folgt elf ω -Sprachen (Folgenmengen) über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ definiert – sei es

- natürlichsprachlich,
- als ω -regulärer Ausdruck,
- mittels einer PLTL-Formel oder
- durch einen Büchi-Automat:

L_1 : Unmittelbar auf c folgt nie b .

L_2 : a 's kommen jeweils nur genau zu zweit hintereinander vor, d.h. wenn vor einem a kein a steht, dann folgt unmittelbar noch ein a und unmittelbar darauf kein a .

L_3 : $(aa|b|c)^\omega$

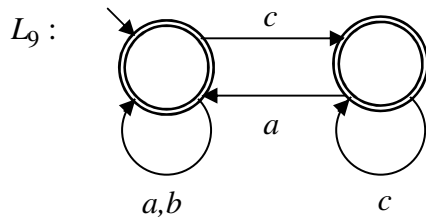
L_4 : $(b|c^*a)^\omega | (b|c^*a)^*c^\omega$

L_6 : $\neg F(c \wedge Xb)$

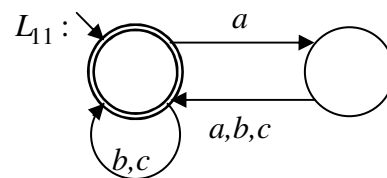
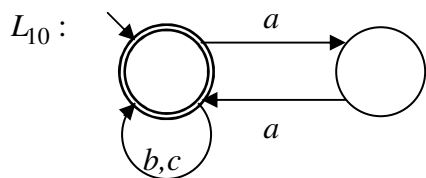
L_5 : $(aab|aac|b|c)^\omega$

L_7 : $\mathbf{G}c \rightarrow \neg Xb$

L_8 : $[(a \wedge Xa \wedge XX\neg a) \vee \neg a] \wedge \mathbf{G}((\neg a \wedge Xa) \rightarrow XX(a \wedge X\neg a))]$



a, b, c



Tragen Sie die Sprachen („ L_n “) in die folgenden Kästen so ein, dass gleiche Sprachen im gleichen Kasten stehen und unterschiedliche Sprachen in verschiedenen Kästen. Es kann sein, dass nicht alle Kästen benutzt werden müssen.

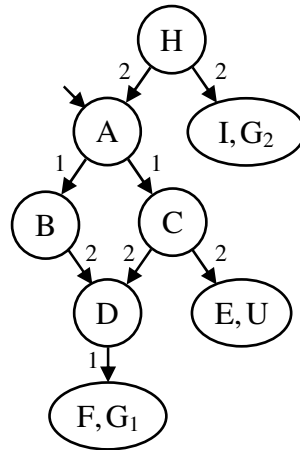
L_1 L_4 L_6 L_9 kein cb	L_2 L_5 L_8 aa^* nur als aa	L_3 L_{10} a^* nur als a^{2n}	L_7 L_{11} alles, d.h. $(a b c)^\omega$	
---	---	---	---	--

Achtung L_7 : Es heißt ja **nicht** $\mathbf{G}(c \rightarrow \neg Xb)$ – das wäre L_1 !

[↑ Kommentare](#)

7. ML, Multimodallogik

(9+3 Punkte)



Das Diagramm zeigt Teile eines Spiels, bei dem 1 und 2 abwechselnd ziehen, d.h. generell gilt $\diamond_i T \rightarrow \neg \diamond_i \diamond_i T$ ($i = 1$ oder 2). Die Situationen sind durch Aussagensymbole A, B, C, D, E, F, Gi, H, I und U dargestellt. In der derzeitigen Anfangssituation gilt A, und 1 ist am Zug.

- U bedeutet: Das Spiel endet unentschieden.
- G_1 (bzw. G_2) bedeutet: 1 (bzw. 2) hat gewonnen.

a) Schreiben Sie multimodale Formeln (mit $\diamond_i, \square_i, i = 1$ oder 2) für ...

i. Es gibt keinen jetzt möglichen Zug von Spieler 1, nach dem dann sofort D gilt:

$\neg \diamond_1 D$

ii. 1 ist dran und kann sicher erreichen, dass er/sie in genau drei Zügen gewinnt:

$\diamond_1 \square_2 \diamond_1 G_1^*$

iii. D gilt am Anfang nicht:

$\neg D$

iv. 1 ist dran, und D könnte möglicherweise nach dem übernächsten Zug gelten:

$\diamond_1 \diamond_2 D$

v. Nach dem nächsten Zug (von 1) kann 2 mit seinem Zug ein Unentschieden erreichen:

$\square_1 \diamond_2 U$

vi. 1 kann nicht in genau drei Zügen verlieren:

$\neg \diamond_1 \diamond_2 \diamond_1 G_2, \square_1 \square_2 \square_1 (G_1 \vee U)$

b) Bitte kreisen Sie die Nummern derjenigen der obigen Aussagen ein, die in der abgebildeten Interpretation wahr sind:

i
ii
iii
iv
v
vi

*) weil im Diagramm alle 1-Nachfolger 2-Nachfolger haben. Ganz allgemein könnte man dies mit $\dots \wedge \diamond_1 \diamond_2 T$ explizit fordern.

8. PL1, Werkzeugkasten**(10 Punkte)**

Zeigen Sie mithilfe des AL&PL1-Werkzeugkastens, dass folgende Folgerung gilt:

$$\forall x(\exists yR(x, y) \rightarrow P(x)) \models P(a) \vee \neg R(a, b)$$

indem Sie unten die fehlenden Begründungen eintragen (Ann. oder Regelkürzel, Nummer(n) der Prämissen).

- (1) $\forall x(\exists yR(x, y) \rightarrow P(x))$ **geg.**
 Zeige $P(a) \vee \neg R(a, b)$
- (2) $\neg(P(a) \vee \neg R(a, b))$ **Ann.**
- (3) | $\neg P(a)$ **2, NOB**
- (4) | $\neg\neg R(a, b)$ **2, NOB**
- (5) | $R(a, b)$ **4, DNB**
- (6) | $\exists yR(a, y)$ **5, EE**
- (7) | $\exists yR(a, y) \rightarrow P(a)$ **1, Sp**
- (8) | $P(a)$ **6,7 MP**
- (9) | \perp **3,8 WE**
- (10) $P(a) \vee \neg R(a, b)$ **IB**

9. PL1, Resolution

(11 Punkte)

Zeigen Sie per Resolution mit Unifikation, dass die Formel

$$\forall x \forall y \forall z [P(f(g(a), x)) \wedge \neg Q(c) \wedge (\neg P(f(y, b)) \vee R(y, z)) \wedge (\neg R(g(a), c) \vee Q(z))]$$

unerfüllbar ist.

- Tragen Sie die abgeleiteten Klauseln (in PL1: Mengen (evtl. verneinter) atomarer Formeln) in die \square -Kästen ein.
- Tragen Sie die verwendeten allgemeinsten Unifikatoren (Substitutionen im Stile von $[u, w/h(a, v), b]$) in die \square -Kästen ein,

