Aussagenlogik

- Syntax
- Semantik
- Formeln, Modelle, Tautologien und Anwendungen
- Folgerungen, Theorien
- Syntaktisch besondere Formeln und Formelgraphen, wichtige Algorithmen
- Axiomatiken, Kalküle

Aussagenlogik

- **Syntax**

Aussagenlogische Formeln (1)

Das **Alphabet** der Aussagenlogik AL umfasst

- eine abzählbare Menge *AV* von **Aussagesymbolen** (**Aussagevariablen**), hier $A_1, A_2, \ldots$. Informell schreiben wir aber auch oft *A, B, C, ...* oder geben sogar selbsterklärende Namen wie *Es_regnet.* Manchmal sprechen wir über „beliebige Aussagesymbole“; dann benutzen wir dafür stellvertretende Variablennamen *P, Q, ...*
- **Junktoren** Verwendung Fachausdruck
  - $\neg$ *nicht* (eigentlich einstelliger Operator) **Negation**
  - $\wedge$ ... *und* ... **Konjunktion**
  - $\vee$ ... *oder* ... (incl. *oder beides*) **Disjunktion**
  - $\rightarrow$ *wenn ... dann* **Implikation**
  - $\leftrightarrow$ ... *genau dann, wenn* ... **Äquivalenz, Biimplikation**
- **Klammern** (,) zur Festlegung der *Ausführungsreihenfolge*

Aussagenlogische Formeln (2)

Die **Formeln** der AL sind induktiv definiert:

- Alle Aussagevariablen sind Formeln.
- Für alle Formeln φ, ψ sind
  $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, sowie $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
  Formeln.
  (grau unterlegt = buchstäblich)

Klammern werden ggf. **weggelassen**:

- äußerste, **bequem** $(A \wedge B)$ → $A \wedge B$
- wegen Assoziativität, **Semantik** $((A \wedge B) \wedge C)$ → $A \wedge B \wedge C$
- bei Junktor-Prioritäten **z.B. $\wedge$ vor $\to$** **wir nicht** $((A \wedge B) \to C)$ → $A \wedge B \to C$

Aussagenlogische Formeln (3)

Die **Sprache** der AL-Formeln wird auch durch folgende **Grammatik** erzeugt:

- $N = \{S\}$ Nichtterminalsymbole
- $T = \{A_1, A_2, \ldots, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ Terminalsymbole
- $S = S$ Startsymbol
- $R = \{S \rightarrow A_1 \mid A_2 \mid \ldots,$ Regeln
  $S \rightarrow \neg S \mid (S \wedge S) \mid (S \vee S) \mid (S \rightarrow S) \mid (S \leftrightarrow S)\ \}$

Problem: Terminal-Alphabet T und Regelmenge R sind **unendlich.**

Reparaturmöglichkeit: Ersetze in der Sprache jedes A_i durch eine Kette $A...A$ von i A's.

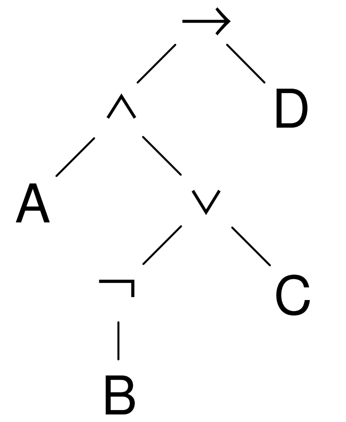
Wie lauten dann T und R?

Aussagenlogische Formeln (4)

Alternative Schreibweisen

Schreibweise	Beispiel
Unsere (**Infix**):	$(A \wedge (\neg B \vee C)) \rightarrow D$
polnisch:	$\rightarrow \wedge A \vee \neg BCD$
umgekehrt polnisch:	$AB\neg C \vee \wedge D \rightarrow$

neutral: geordneter Baum



Ü9

Funktionen auf den AL-Formeln

Die **Variablenmenge** einer Formel

$Vars : Form \to \mathbf{P}(\{A_1, A_2, ...\})$

ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
Vars(P) &:= \{P\}, && \text{für } P = A_1, A_2, ...\\
Vars(\neg\varphi) &:= Vars(\varphi)\\
Vars(\varphi \wedge \psi) &:= Vars(\varphi \vee \psi) := Vars(\varphi \to \psi) := Vars(\varphi \leftrightarrow \psi)\\
&:= Vars(\varphi) \cup Vars(\psi)
\end{aligned}$$

Analog für Formel φ ...

- die Menge $Sub(\varphi)$ ihrer **Teilformeln**, Ü10a
- der **Grad** $Grad(\varphi)$, die Zahl ihrer Junktoren-Anwendungen,
- die **Tiefe** $Tiefe(\varphi)$, ihre größte Junktoren-Schachtelungstiefe. Ü10bc

Die wichtigste Funktion auf AL-Formeln ist ihr **Wahrheitswert**,

wahr oder falsch,

in Abhängigkeit von den festgelegten Wahrheitswerten der beteiligten Aussagevariablen.

Aussagenlogik

- Syntax
- **Semantik**

Belegungen

Die wichtigste Funktion auf AL-Formeln ist ihr **Wahrheitswert**, wahr oder falsch, in Abhängigkeit von den festgelegten Wahrheitswerten der beteiligten Aussagevariablen.

Unsere Menge der **Wahrheitswerte** ist

{W,F} (für **wahr**, **falsch**).
Häufig verwendet man z.B. auch T/F, true/false, 1/0.

Eine **Belegung** oder **Interpretation** ist eine Abbildung

bel: $\mathrm{Def}_{bel} \to \{W, F\}$

von einer Menge von Aussagevariablen, $\mathrm{Def}_{bel} \subseteq \{A_1, A_2, ...\}$, in $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$.

bel ist **ausreichend** (oder **passend**) für eine Formel φ,

wenn es alle Aussagevariablen der Formel belegt, d.h.

$Vars(\varphi) \subseteq \mathrm{Def}_{bel}$.

Wahrheitswerte von Formeln

Jetzt ordnen wir

– in Abhängigkeit von einer gegebenen ausreichenden Belegung *bel* –

jeder Formel φ ihren **Wahrheitswert** $wert_{bel}(\varphi)$ rekursiv zu:

- $wert_{bel}(A_i) \quad := \quad bel(A_i)$
- $wert_{bel}(\neg\varphi) \quad := \quad sem_{\neg}(wert_{bel}(\varphi))$

und für unsere 4 zweistelligen logischen Junktoren $j = \wedge, \vee, \rightarrow$ bzw. $\leftrightarrow$

- $wert_{bel}(\varphi\ j\ \psi) \quad := \quad sem_j(wert_{bel}(\varphi), wert_{bel}(\psi))$

Junktorensemantiken

Die **Junktorensemantiken** $sem_j : \{W, F\}^2 \to \{W, F\}$, bzw. $sem_\neg : \{W, F\} \to \{W, F\}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

φ	ψ	$sem_\neg(\varphi)$ $\neg\varphi$	$sem_\wedge(\varphi,\psi)$ $(\varphi \wedge \psi)$	$sem_\vee(\varphi,\psi)$ $(\varphi \vee \psi)$	$sem_\to(\varphi,\psi)$ $(\varphi \to \psi)$	$sem_\leftrightarrow(\varphi,\psi)$ $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
W	W	F	W	W	W	W
W	F		F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F		F	F	W	W

Dabei steht im Spaltenkopf oben die „mathematisch strenge“ Inschrift, darunter die gebräuchliche, intuitiv verständlichere.

Man mache sich an Beispielen klar, wie die rekursive **Evaluation** einer Formel in deren Baum von den Blättern zur Wurzel aufsteigt.

Ü11

Aussagenlogische Formeln und sprachliche Aussagen

Eine **Aussage** ist eine sprachliche Äußerung, der *man* in der *jeweiligen Situation* den Wert wahr oder falsch zuordnen *kann*.

Eine **atomare Aussage** ist eine Aussage ohne Negation und ohne Junktoren wie *nicht, und, oder, wenn dann, genau dann wenn* oder Ähnliches.

Eine sinnvolle Aussage ist also aus atomaren Aussagen, Negationen und Junktoren **zusammengesetzt**. Sie erhält ihren Wahrheitswert in zwei Stufen:

- Die **Situation** ordnet jeder atomaren Aussage den Wert wahr oder falsch zu.
- Die **Junktorensemantiken** ordnen der Aussage gemäß ihrer Zusammensetzung den Wert wahr oder falsch zu.

Angewandte Situationen

Die Situation ist in umgangssprachlichen Aussagen oft

- hier und jetzt (z.B. **„Es regnet.“**)

bzw. festgelegt durch Faktoren wie:

- vorherige sprachliche Situationsbeschreibung (Zeit, Ort, Subjekte, Objekte)

  („Gestern abend begegnete mir Frau Müller auf der Treppe;“)
  „... ihr Hund hat mich ganz schön angeknurrt.“

- nichtsprachliche Zeigeaktionen

  (Kunde deutet auf Apfelkiste.)
  „Die sehen nicht ganz frisch aus.“

- zeitliche Nähe und Auffälligkeit (implizit)

  (Wumpa-wumpa!)
  „Der hat aber seine Anlage im Auto voll aufgedreht.“

Ü12

Wahrheitstafeln: Algorithmus zur Werteverlaufsberechnung

Gegeben sei eine Formel φ mit n Aussagevariablen.

Beispiel: $\boxed{(A \to B) \vee \neg B}$, n=2

(1) Lege eine Tabelle mit 2^n Zeilen und je einer Spalte für jede Teilformel von φ an und überschreibe die Spalten oben entsprechend so, dass alle deren Teilformeln links davon stehen.

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$(A \to B) \vee \neg B$
W	W			
W	F			
F	W			
F	F			

(2) Trage in die Spalten für die Aussagevariablen zeilenweise alle 2^n möglichen W/F-Kombinationen ein.

(1) und (2) sind nicht-deterministisch.

(3) Trage in allen Spalten von links nach rechts die Wahrheitswerte der komplexeren Formeln gemäß den Wahrheitswerten ihrer (maximalen echten) Teilformeln und der Junktorensemantik ihres „obersten Junktors“ ein.

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$(A \to B) \vee \neg B$
W	W	W	F	**W**
W	F	F	W	**W**
F	W	W	F	**W**
F	F	W	W	**W**

Ü13a Ü13b

… funktioniert natürlich

Satz: Terminierung und Korrektheit des Wahrheitstafelalgorithmus

Der Wahrheitstafelalgorithmus **terminiert**.

Anschließend enthält die φ-Spalte den **Wahrheitswerteverlauf** von φ, nämlich in jeder Zeile den Wahrheitswert von φ für die in der betreffenden Zeile stehende Belegung ihrer Aussagevariablen.

Andere, teilweise übliche, Schreib-/Vorgehensweise („in situ“):

$(A$	$\rightarrow$	$B)$	$\vee$	$\neg$	B
W	W	W	**W**	F	W
W	F	F	**W**	W	F
F	W	W	**W**	F	W
F	W	F	**W**	W	F

… oder Abkürzungen für Teilformeln einführen und verwenden.

Vor-/Nachteile?

Andere zweistellige Junktoren

Wir kennen jetzt 4 zweistellige Junktoren(semantiken), entsprechend vier W-F-Belegungen einer 4-zeiligen Spalte.

Es gibt aber **16** solche Spalten-Belegungen:

φ	ψ	T	$\vee$	$\leftarrow$	φ	$\rightarrow$	ψ	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\uparrow$	$\not\leftrightarrow$	$\neg\psi$	$\not\rightarrow$	$\neg\varphi$	$\not\leftarrow$	$\downarrow$	$\bot$
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F

Beispiele:

$\uparrow$ – Sheffer-Verknüpfung, NAND

$\downarrow$ – Peirce-Verknüpfung, NOR

Ü14

Wo stehen z.B. …

- wahr, egal ob φ oder ψ ?
- weder … noch
- entweder … oder (XOR)
- ψ nur dann wenn φ
- ψ nur dann wenn nicht φ

Höherstellige Junktoren

Es gibt $2^{(2^n)}$ Spaltenbelegungen für n-stellige Junktoren.

Wichtigster 3-stelliger Junktor (von 256) ist der **Entscheidungsoperator**

$\varphi \to \psi_1 / \psi_2$, auch **if** φ **then** ψ_1 **else** ψ_2 geschrieben.

Dies entspricht auch ...

$(\varphi \wedge \psi_1) \vee (\neg\varphi \wedge \psi_2)$ bzw. $(\varphi \to \psi_1) \wedge (\neg\varphi \to \psi_2)$.

Ü15ab Ü15c

Das **Programm-Statement**

A: IF <boolescher_term>
THEN <anweisung1>
ELSE <anweisung2>

bewirkt **logisch** ausgedrückt:

if boolescher_term(Zustand vor A)
then Zustand nach A = Zustand nach anweisung1
else Zustand nach A = Zustand nach anweisung2.