Späte Fragen und Antworten zur Logik-Vorlesung
WS 17/18, WS 16/17 und SS 16

WS 17/18

Frage(n)

1. Frage:

Kann es sein, dass bei der Lösung von der Zusatzaufgabe 16 (a) im letzten Schritt vergessen wurde, die doppelte Negation zu beseitigen?

1. Antwort

Nein, nicht wirklich, denn die Formel erfüllt bereits das geforderte Ziel:

- kein "Rollenkonflikt" zwischen Variablen, also bereinigt
- alle Quantoren vorne, also PNF
- insgesamt: BPNF, alles OK.

KlNF wäre natürlich noch nicht erreicht, war aber auch nicht verlangt.

2. Frage (bezüglich 1. Antwort):

Im Algorithmus BPNF steht doch aber im dritten Schritt ganz unten, dass die doppelte Negation beseitigt werden muss.

2. Antwort

OK: Das „ggf." zwischen der zweiten und dritten Umformung im 3. Schritt ist sehr vage, das muss ich genauer ausführen (geschieht demnächst auch in Folien & Skript):

- Die dritte der vier Umformungen innerhalb Schritt 3 (Antidistributivität) ist nur erforderlich, solange noch φ oder ψ Quantoren enthält.
- Und die vierte der vier Umformungen innerhalb Schritt 3 (Doppelnegation beseitigen) ist eigentlich gar nicht erforderlich, sondern beschleunigt lediglich die Berechnung, solange noch φ Quantoren enthält. Anstatt zwei „¬" einzeln und in evtl. vielen Schritten nach hinten zu schaufeln, entsorgt man sie in einem Schritt. Andernfalls (keine Quantoren in φ) braucht man Doppelnegationen nicht zu beseitigen, solange es nur um BPNF geht.
  Berechnet man später eine erfüllbarkeitsäquivalente KlNF, dann werden auch die Doppelnegationen hinter/unter allen Quantoren beseitigt.

Frage(n)

Beim Studieren des Skriptes "Multimodale Logiken" hatte ich bei der Übungsaufgabe 3 Schwierigkeiten. Hierbei habe ich eine andere Wahrheitstabelle herausbekommen, als die in den Lösungen. Ich verstehe nicht, wieso bei $\Box_1 (A \to B)$ bei der Situation b und c ein W steht, denn es ist notwendig, dass mit allen von der Situation ausgehenden 1-er Transitionen eine Situation erreicht wird, in der A->B gilt. Jedoch gehen von der Situation b und c keine Pfeile aus.

Antwort(en)

$\Box_1$ bzw. 1-notwendig bedeutet: „in allen 1-Nachfolgern gilt …“

Das Wort „notwendig“ kommt daher, dass $\Box\,\varphi$ für einen Knoten K so interpretiert werden kann: Wenn ich mich in einen beliebigen Nachfolger von K begebe, dann gilt dort notwendigerweise φ (entsprechend mit speziellen Nummern für Nachfolgerarten).

Diesen Effekt hatten wir schon oft beobachtet, in PL1 und in der monomodalen Logik:
Alle Elemente einer **leeren** Menge haben **jede** erdenkliche Eigenschaft!

Beispiele: Alle meine noch lebenden Urgroßmütter – ich bin ca. 70 Jahre alt – sind Milliardärinnen (und bettelarm!), und alle meine Rolls-Royce sind lila und können fliegen. Und meinem Nachbarn würde ich jederzeit sämtliche ihm gehörenden Airbus-380-Flugzeuge für 10 Euro neu streichen. Denn: Es geht jeweils um alle Elemente einer leeren Menge! Und für die ist alles wahr (einschließlich dem jeweiligen Gegenteil).

$\Box_1\,\varphi$ gilt daher für **jede** syntaktisch passende Formel φ in **jedem** Knoten **ohne** 1-Nachfolger. Denn $\Box_1\,\varphi$ behauptet dann eine Eigenschaft φ für alle Elemente der **leeren** 1-Nachfolgermenge. Und das stimmt halt unabhängig von φ.

Also gilt $\Box_1 (A \to B)$,
weil $A \to B$ in **allen** 1-Nachfolgern von b und **allen** 1-Nachfolgern von c gilt,
weil es **keine** 1-Nachfolger von b und **keine** 1-Nachfolger von c **gibt**.

WS 16/17

Frage(n)

Gewinnt man in der Aussagenlogik eine äquivalente DNF zu einer Formel, indem man alle Blätter eines Tableaubaumes der Formel mit UND verbindet?

Antwort(en)

Nein! Für jeden Zweig des Tableaubaumes verbindet man alle Literale auf dem Zweig durch UND. Dann verbindet man alle diese einzelnen UND-Ketten (Dualklauseln) durch ODER.

Frage(n)

Bei Aufgabe 25a ist als Lösung $A \rightarrow (B \rightarrow \top / \bot) / (B \rightarrow \top / \bot)$ angegeben.

Es müsste aber heißen $A \rightarrow (B \rightarrow \top / \top) / (B \rightarrow \bot / \bot)$, äquivalent zu 25c, oder?

Antwort(en)

... völlig richtig, danke!

Frage(n)

Bei der Lösung von Aufgabe 59 – es geht um den letzten Part der Formel ("bahnhof darmstadt ist mit bahnhof egelsbach verbunden") –

¬V(da,egb)

Warum ist V(da,egb) negiert?

Antwort(en)

das steht eigentlich in den ersten Zeilen der Lösung und wurde auch in der Vorlesung oft erläutert.

Sie erinnern sich vielleicht, für Formeln X, Y, usw. gilt:

1. (X UND NICHT Y) == NICHT (WENN X, DANN Y)
also, falls negiert:
2. NICHT (X UND NICHT Y) == (WENN X, DANN Y)
und, falls für alle Belegungen zutreffend:
3. (a) "(X UND NICHT Y) ist unerfüllbar" ist gleichbedeutend mit
   (b) "(WENN X, DANN Y) ist allgemeingültig."

Setzen Sie dann (X1 UND X2 UND X3) für X und die drei Prämissen für die Xi.

(b) wollen wir eigentlich wissen;
(a) liefert uns die Resolution.

Frage(n)

Hier die Lösung aus der Zusatzaufgabe 13 (3):

∀x (∃y (N(y) ∧ B(x,y)) → ¬S(x))

Meine Lösung war etwas anders:
∀x ∃y ((N(y) ∧ B(x,y)) → ¬S(x))

Antwort(en)

Sorry, Ihre Lösung ist falsch.

Wie kam ich zu meiner? -:
x hat ein Lebewesen, das nachts heult bedeutet: Es gibt ein Lebewesen, das nachts heult und von x besessen wird, also ∃y (N(y) ∧ B(x,y))

Was ist an Ihrer Antwort falsch?
Sie ist wahr, sobald es ein Lebewesen gibt, das **nicht** nachts heult – auch wenn das Heulen **nicht** jeden vom Schlaf abhält, was aber verlangt war.

Frage(n)

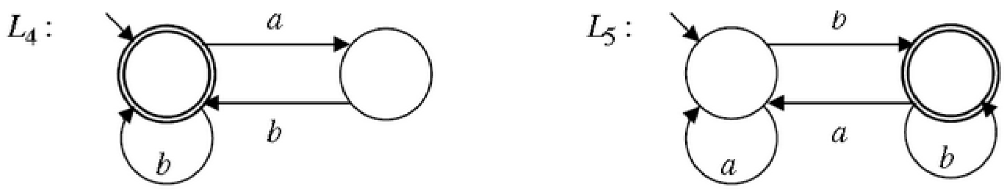
Um den Term in Klausel-NF zu bekommen, muss man eine gewisse Prozedur durchführen. Diese ist auf Folie 343 gezeigt. Dort wird der Term im 2. Schritt "abgeschlossen" also ein " ∃" vorne dran gesetzt. Dies ist bei der Lösung für 21(c) nicht der Fall. Warum?

Antwort(en)

Es wird nicht einfach „ein "∃" vorne dran gesetzt“, sondern eines für jede freie Variable. Das können auch mal mehrere sein, oder – wie in 21c – gar keines (mangels freier Variablen, die Formel ist bereits abgeschlossen!).

Frage(n)

In Zusatzaufgabe (Z21 PLTL), wieso sind dort L9 und L5 identisch, aber nicht L4 und L9? Es bedeutet ja L9 "b gilt Unendlich oft", und das wäre doch auch bei L4 möglich?



L_6 : $(b \mid ab)^\omega$ L_9 : $\mathsf{GF}\,b$

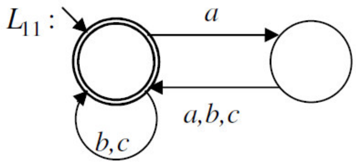
Antwort(en)

- In der Tat sind Folgen mit unendlich vielen b in L4 nicht nur <u>möglich</u>, sondern <u>alle</u> L4-Folgen enthalten unendlich viele b, da man unendlich oft links vorbeikommen muss, und das geht nur mit b.
- Das bedeutet, dass jedes L4-Wort auch ein L9- bzw. L5-Wort ist. Also ist L4 eine Teilmenge von L9.
- Damit nun die beiden Sprachen dieselben sind, müsste auch noch L9 Teilmenge von L4 sein.
- Das ist es aber nicht, wie z.B. das Wort a^2b^ω = aabbbbbb... zeigt, das zwar in L9 aber nicht in L4 liegt.

Frage(n)

In der Altklausur, wieso sind dort L11 und L7 identisch? L11 hat ja die Wörter (a|b|c)* also alle Wörter, aber bei L7 darf stets auf ein c kein b folgen, oder?

$L_7: \quad \mathsf{G}\, c \to \neg \mathsf{X}\, b$



Antwort(en)

L11 hat nicht die Wörter (a|b|c)*, sondern umfasst alle ω-Wörter (Folgen) über a, b und c, d.h. $(a|b|c)^\omega$. Aber das meinten sie wahrscheinlich.
Sie irren sich aber insbesondere bezüglich L7, vielleicht weil Sie in Gedanken hinter G eine öffnende Klammer hinzufügten. L7-Folgen haben folgende Eigenschaft: Wenn alle Glieder c sind, dann ist das folgende Glied kein b - und das gilt immer, also für alle Folgen. Etwa so wie: Wenn ab heute <u>immer</u> Montag ist, ist morgen bestimmt nicht Dienstag.

Frage

In PL1, bei der Bereinigung durch gebundene Umbenennungen, wie kann ich wissen, ob eine Quantorvariable nicht erledigt ist?

Antwort

Was Sie erledigen, das ist hinterher erledigt.
Und daher müssen Sie sich irgendwie merken, was Sie gerade erledigt haben.
Zum Beispiel mit einem Häkchen.

Anschlussfrage zur obigen

Aber warum haben Sie im Beispiel auf Folie 335 in der zweiten gelb unterlegte Zeile die blau markierte Quantorvariable ausgesucht?

$$P(x) \lor (\ \forall x\ (\exists x Q(x,x) \land R(x)\ ) \lor S(x)\ )$$

Antwort

So ganz verstehe ich Ihr Problem nicht.

<Ähnliches Problem(?): Wenn Sie eine Reihe Bücher von links nach rechts abstauben wollen, dann fangen Sie mit dem am weitesten links an. Und am Anfang ist noch keines erledigt. Und was links davon steht, aber kein Buch ist, das stauben wir dann auch nicht ab.>

Das erste x, das in "P(x)", ist keine Quantorvariable, denn es steht weder ∀ noch ∃ davor.
<Den Ordner links von den Büchern wollen wir nicht abstauben, nur die Bücher.>

Die Quantorvariablen von links nach rechts sind also zuerst das x in "∀x" und dann das x in "∃x". Also ist das x in "∀x" das erste. Und da wir gerade erst anfangen zu arbeiten, ist es noch nicht erledigt.
<Jetzt haben wir das "linkeste" Buch gefunden und fangen an es abzustauben.>

Oder haben Sie Variablen mit Variablenvorkommen verwechselt? (Das ist so wie bei frei/gebunden: Nicht die Variable ist frei oder gebunden, sondern das eine oder andere ihrer Vorkommen.) **Hier** geht es um **Variablenvorkommen**. Es gibt im Beispiel sechs x-Vorkommen; das erste ist frei, die beiden nächsten sind Quantorvariablen, die letzten vier sind gebunden (und zwar durch unterschiedliche Quantoren (und Quantorvorkommen)). Siehe auch Folien 285 und 286.

Fragen und Antworten zur Logik-Vorlesung SS 16

Frage(n)

1. Können Sie mir bitte erklären, warum in der Lösung zur Übungsaufgabe 48 d.) der Existenzquantor in der eckigen Klammer von ∃u zu ∃v umbenannt wird. Es sind doch bereits alle Quantorvariablen unterschiedlich.

2. Im Skript auf Seite 38 zum Satz der Erfüllbarkeitsäquivalenten KNF wird im Beispiel in Zeile 2 die Formel abgeschlossen mit der Einführung von ∃x. Warum muss man das machen? Aus welcher Regel kann man das ablesen? Hätte es auch ein Allquantor anstelle des Existenzquantors sein können?

Antwort(en)

zu 1: "Bereinigt" heißt "keine Variable hat zwei Rollen". In der Formel ist u vorne Quantorvariable aber hinten frei, nämlich gemeinerweise gar nicht im Scope des Quantor-u's.

zu 2: Da wir mit Resolution die Erfüllbarkeit untersuchen wollen, brauchen wir etwas Erfüllbarkeits-äquivalentes. Das funktioniert mit Abschluss durch **Ex.-quantoren**, vgl. Lemma links oben auf S.38. All-quantisiert wäre die neue Formel i.a. NICHT erfüllbarkeits-äquivalent (sondern allgemeingültigkeits- bzw. widerlegbarkeits-äquivalent). Es gibt Varianten der Skolemisierung, bei denen man freie Variablen so behandelt, wie wir nach dem Existenz-Abschluss die vordersten: Ersetzen durch neue Konstanten. Das sind nur kleine technische Unterschiede im Vorgehen, mit demselben Ergebnis.

Frage(n) + >>>Antwort(en)

Bei der Bearbeitung der Tableau-Aufgaben zur PL1 sind wir auf eine weitere Unklarheit gestoßen:
Nach welcher Regel werden bei den erw. Tableau-Regel variable Werte durch Konstanten ersetzt?

>>> Nach den Regeln auf Folien 319&320

In der Lösung der Zusatzaufgabe 14 werden x und u durch c, v und y durch d ersetzt. Aus welcher Regel geht dies hervor?

>>> s.o. , aber auch s.u.

Warum darf man das machen?

>>> Man kann beweisen, dass der Tableau-Algorithmus zum Beweis der Unerfüllbarkeit korrekt ist. Das haben wir nicht nachvollzogen (viel Mathe-Technik).

Ein anderes Beispiel wäre Übungsaufgabe 45, Teil b)
Warum werden x UND y zu c, und nicht etwa zu c und d?

>>> Man wählt die Konstanten so, dass man einen Widerspruch erzeugt.
Das funktioniert z.B. mit P(a) und NOT P(a) , aber es funktioniert nicht mit P(a) und NOT P(b) .

Frage(n)

Ist in Übungsaufgabe 47b eigentlich nach einer äquivalenten oder nur nach einer erfüllbarkeits-äquivalenten Formel in BPNF gefragt?
Im letzteren Fall wäre auch
Bereinigen (und Abschließen): $\exists y \forall x\{P(x) \rightarrow [\forall u R(x,u) \rightarrow \neg \forall z S(y,z)]\}$
usw.
möglich.

Antwort(en)

Gut beobachtet. Eine präzisere und umfassendere Aufgabenstellung wäre z.B.

Erzeugen Sie
- (i) eine äquivalente BPNF-Formel und
- (ii) eine erfüllbarkeits-äquivalente geschlossene BPNF-Formel

für die Formel:
b) $\forall x\{P(x) \rightarrow [\forall y R(x,y) \rightarrow \neg \forall z S(y,z)]\}$

Frage(n)

In der Lösung von Übung 44c steht „x ist frei und zwar im Scope von ∀y."
Allerdings kommt in ∀yR(y,c) doch das x nicht vor?
Müsste es nicht heißen in ∃y, wegen ∃yR(x,y)?

Antwort(en)

Ja, richtig: Es müsste heißen „im Scope von ∃y".