Wiederholung Mengenlehre

1. Teilmengen, Mengenoperationen, Abbildungen
Seien Teilmengen der natürlichen Zahlen wie folgt definiert:

$A := \{2n \mid n \in I\!N\}$, $B := \{3n \mid n \in I\!N\}$, $C := \{4n \mid n \in I\!N\}$

$D := \{6n \mid n \in I\!N\}$, $E := \{8n \mid n \in I\!N\}$.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
i. $A \subseteq C$ ii. $E \subseteq C$ iii. $B \subseteq D$ iv. $E \subseteq D$
v. $D = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ (auch: „$A \cdot B$“ geschrieben) vi. $E = A \cap C$
vii. $E \times D \subseteq A \times B$ viii. $A \cup B = I\!N \setminus \{1\}$.

Lösung 1a
i: F, ii: W, iii: F, iv: F, v: W, vi: F, vii: W, viii: F

(Warum ist <u>nicht</u> $A \cdot B = \{6n^2 \mid n \in I\!N\}$, wo doch $2n \cdot 3n = 6n^2$?
Sie sollten ohnehin alle Entscheidungen übungshalber begründen!)

b) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
i. $A \cap B$ ii. $C \cap E$ iii. $B \cup D$ iv. $B \setminus D$ v. $C \times D$

Lösung 1b
i. $A \cap B = D$ ii. $C \cap E = E$ iii. $B \cup D = B$
iv. $B \setminus D = \{3 \cdot (2n-1) \mid n \in I\!N\}$ v. $C \times D = \{(4m, 6n) \mid m, n \in I\!N\}$

2. Relationen, Abbildungen

a) Sei $f : S \to T$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die durch $x \approx y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ auf S definierte Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung 2a
Seien $a, b, c \in S$.
symmetrisch: $a \approx b \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b \approx a$
transitiv: $a \approx b$ und $b \approx c \Rightarrow f(a) = f(b)$ & $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow a \approx c$
reflexiv: $f(a) = f(a) \Rightarrow a \approx a$

b) Welche der folgenden Aussagen sind (bezüglich der Abbildungsgraphenmengen) mit A, B, C, D wie in Aufg. 1 richtig, welche falsch – und warum?
i. $D^C \subseteq A^C$ ii. $C^D \subseteq A^B$ iii. $C^A \subseteq C^D$

Lösung 2b
i. F: Eine Abbildung f auf D enthält kein Paar $(3,x)$, eine Abbildung auf B tut das.
ii. F: Eine Abbildung f auf D enthält kein Paar $(2,x)$, eine Abbildung auf A tut das.
iii. W: Eine linkstotale, rechtseindeutige Teilmenge von $C \times D$ ist auch eine linkstotale, rechtseindeutige Teilmenge von $C \times A$, denn ein Paar $(c,d) \in C \times D$ ist wegen $D \subseteq A$ (denn $6 \cdot n = 2 \cdot (3n)$), also $d \in A$, auch Element von $C \times A$.

kein weiterer **Tipp** zu **E1** nötig

3. Bildmenge

Bildmengen $f[A]$ werden häufig auch als $f(A)$ geschrieben. Zeigen Sie anhand einer Abbildung auf { 1, {1}}, dass dies zu inakzeptablen Mehrdeutigkeiten führt.

Lösung 3
Sei z.B. $f(1) = a$, $f(\{1\}) = a$. Dann bedeutet $f(\{1\})$ (d.h. a) aber gleichzeitig $f[\{1\}]$, d.h. $\{f(1)\}$, d.h. $\{a\}$. Das klappt nur wenn $a = \{a\}$. Und das ist in jeder üblichen Art Mengenlehre falsch. Etwa so wie ein Apfel nicht dasselbe ist wie eine Plastiktüte mit einem Apfel darin. (Beißen Sie mal rein …).

4. Abbildungen

a) Geben Sie alle möglichen Abbildungen von {1,2} nach {a,b,c} an.

Lösung 4a
Wir beschreiben der Kürze wegen jede Funktion f kurz durch das 2-buchstabige Wort $f(1)f(2)$. Dann gibt es die 9 Abbildungen *aa*, *ab*, *ac*, *ba*, *bb*, *bc, ca*, *cb*, *cc*.

b) Geben Sie alle möglichen Funktionen von {1,2,3} nach {a,b} an.

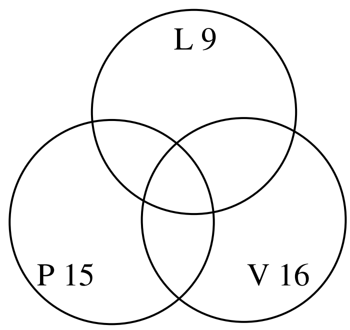
Lösung 4b
Wir beschreiben der Kürze wegen jede Funktion f kurz durch das 3-buchstabige Wort $f(1)f(2)f(3)$. Dann gibt es die 8 Abbildungen *aaa*, *aab*, *aba*, *abb*, *baa*, *bab, bba*, *bbb*

c) Welche von ihnen sind
i. injektiv? ii. surjektiv? iii. bijektiv?

Lösung 4c
(zu a) injektiv: *ab*, *ac*, *ba*, *bc, ca*, *cb*. surjektiv: – bijektiv: –
(zu b) injektiv: –. surjektiv: *aab*, *aba*, *abb*, *baa*, *bab, bba.* bijektiv: –
Es gibt bijektive Abbildungen ohnehin nur zwischen Mengen mit gleichvielen Elementen.

Tipp zu **E2**

Schreiben Sie die anderen gegebenen Zahlen geeignet hinein, sowie dann die Zahlen, die Sie daraus folgern können.



Wiederholung Induktion, Rekursion

5. Induktive Mengendefinition

Definieren Sie induktiv über dem Alphabet $Alph=\{a,b\}$

a) die Sprache aller Wörter, die eine ungerade Anzahl von Buchstaben enthalten,
b) die Sprache aller Palindrome, d.h. der Wörter, die sich rückwärts wie vorwärts lesen,
c) die Sprache aller doppelten Wörter *ww*.

Lösung 5

a) $a, b \in L_a$, $\quad w \in L_a \Rightarrow waa, wab, wba, wbb \in L_a$

b) $\varepsilon, a, b \in L_b$, $\quad w \in L_b \Rightarrow awa, bwb \in L_b$

c) ε, $\quad ww \in L_c \Rightarrow wawa, wbwb \in L_c$ (Beachte: $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon$)

bzw. (etwas strenger) mit gleichzeitig rekursiv definierter Abbildung *halb* so dass *halb*(*ww*)=*w*:

$w \in L_c \Rightarrow halb(w)\,a\,halb(w)\,a \in L_c$ und $halb(w)\,b\,halb(w)\,b \in L_c$,

wobei $halb(\varepsilon) := \varepsilon$, und $halb(halb(w)\,x\,halb(w)\,x) := halb(w)\,x$ für $x = a$ oder *b*.

6. Rekursive Funktionsdefinition und induktiver Beweis

a) Beweisen Sie $\quad 1 + ... + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Lösung 6a

Ind.-Basis: Es stimmt für *n*=0, denn 0=0x1/2.
Ind.-Ann.: Es stimme für *n*.
Ind.-Schritt: Dann ist

$$1 + ... + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n \cdot (n+1) + 2n + 2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$$

D.h. es stimmt für *n*+1.

b) Wenn wir die Addition noch gar nicht kennen, sondern (für jedes *m*) $m+n$ als einstellige Funktion „$m^+(n)$" rekursiv für das Argument *n* so definieren:

$m+0$ bzw. $m^+(0)$ $:= m,$
$m + succ(n)$ bzw. $m^+(succ(n))$ $:= succ(m+n)$ bzw. $succ(m^+(n))$,

wie können wir dann die Assoziativität $\quad l + (m+n) = (l+m) + n \quad$ beweisen?

Lösung 6b

Induktion über *n*:

Ind.-Basis: Die Aussage „Für alle *l,m*: $l + (m+n) = (l+m) + n$" gilt für $n = 0$, denn $l + (m+0) = l + m = (l+m) + 0$.
Ind.-Ann.: Es gelte für *n*: „Für alle *l,m*: $l + (m+n) = (l+m) + n$."
Ind.-Schritt: Dann ist

$$\begin{aligned} l + (m + succ(n)) &= l + succ(m+n) \\ &= succ(l + (m+n)) \\ &= succ((l+m)+n) \\ &= (l+m) + succ(n) \end{aligned}$$

Anschlussübung:

Schreiben Sie die Aussage und ihren Beweis komplett in der $m^+(n)$-Schreibweise.

c) Beweisen Sie für die Länge und Verkettung von Wörtern über Σ: $l(v \circ w) = l(v) + l(w)$.

Lösung 6c
Mit Hilfe der induktiven Definitionen beweisen wir jetzt $l(w \circ w') = l(w) + l(w')$ per Induktion über w :
Ind.-Basis: $l(v \circ \varepsilon) = l(v) = l(v) + 0 = l(v) + l(\varepsilon)$
Ind.-Ann.: $l(v \circ w) = l(v) + l(w)$,
Ind.-Schritt: dann $l(v \circ (wa)) = l((v \circ w)a) = l(v \circ w) + 1 = l(v) + l(w) + 1 = l(v) + l(wa)$.

d) Mathematikerin Martha und ihre Freundin Bertha:
M: Die Männer sind doch alle gleich!
B: Irgendwie schon.
M: Das kann ich sogar mathematisch beweisen: Alle Männer sind identisch.
B: Nee, ernsthaft?
M: 1. Nimm mal n=1, also einen Mann M1: In der Menge {M1} sind alle identisch.
2. Nimm nun an, das gilt für alle Mengen von jeweils n Männern,
3. und stelle Dir eine Menge {M1, …, Mn+1} von n +1 Männern vor.
4. Wenn Du den ersten oder den letzten rausschickst, hast Du jeweils eine Menge von n (wegen (2) identischen) Männern, {M2, …, Mn+1} bzw. {M1, …, Mn},
5. also jeweils alle identisch mit M2.
6. Also sind, da „=" transitiv ist, alle n +1 Männer in {M1, …, Mn+1} identisch.
7. Also sind per Induktion alle in der endlichen Menge aller Männer identisch.
8. Das nennt man „vollständige Induktion", einen induktiven Beweis auf der induktiv definierten Menge der natürlichen Zahlen.
B: Einerseits ist für mich der Erwin der einzige Mann in meinem Leben, insofern stimmt deine Aussage fast. Aber dein Beweis ist nicht ganz korrekt. Immerhin, das muss ich Dir lassen: Es ist nur ein einziger deiner acht Schritte ausgesprochen falsch, nämlich …
Welcher und warum?

Lösung 6d
Schritt 5 stimmt nicht immer; er scheitert im Fall $n = 1$:
Da ist nach (3) $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\} = \{M_1, M_2\}$. Die beiden Teilmengen $\{M_2, \ldots, M_{n+1}\} = \{M_2\}$ und $\{M_1, \ldots, M_n\} = \{M_1\}$ in (4) bestehen dann tatsächlich beide aus jeweils untereinander identischen Männern, da es ja jeweils nur einer ist. Doch daraus folgt nicht, dass $M_1 = M_2$.
Der Schritt erfordert, dass M_2 Element beider Teilmengen ist. Es sieht im Fall $n = 1$ nur so aus, als ob $M_2 \in \{M_1, \ldots, M_n\}$ wäre. Wahr ist das aber nur für $n > 1$.

7. Grammatiken

Geben Sie eine Grammatik für die Palindrome über $\{a,b\}$ an.

Lösung 7
$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

Tipp zu **E3.c**

„Programmieren“ Sie durch eine Grammatik z.B. einen Mechanismus, der

- jeweils zwei gleiche Buchstaben nebeneinander erzeugt, davon aber das zweite Exemplar modifiziert: aA oder bB
- alle Großbuchstaben nach rechts und Kleinbuchstaben nach links „sickern“ lässt, ohne große mit großen oder kleine mit kleinen zu vertauschen (→ Erhaltung der Buchstabenreihenfolge im „halben Wort“!)

Ergänzen Sie die Grammatik so, dass sich noch eine „Verkleinerungsmaschine“ V durch das großgeschriebene Wort fräst, welche

- die Buchstaben klein macht, z.B. von rechts nach links (AV→Va)
- und am Ende verschwindet.

Tipp zu **E4.a**

Zwei Möglichkeiten:
Entweder definieren wir die dreistellige Relation **Pfad(p,a,b)** (p ist Pfad von a nach b) induktiv, oder wir definieren gleichzeitig Pfade induktiv und die Funktionen A und E (Anfangs- und Endknoten) auf Pfaden rekursiv.

8. Baumdefinitionen

Manche Autoren definieren endlich verzweigte geordnete Bäume als Teilmengen von $\mathbb{N}^*$ (Sprache über $\mathbb{N}$), indem sie jeden Knoten mit einer Pfadbeschreibung (im Stile von „und jetzt zum wievielten Kind?“) identifizieren. Geben Sie eine Definition der passenden Sprachen an.

Lösung 8
Beachten:
(a) Der Pfad zur Wurzel ist leer , d.h. ε.
(b) Jedes Anfangsstück eines Pfads ist ein Pfad.
(c) Hat ein Knoten ein n. Kind, dann auch Kinder Nummer 1 bis n–1. – Reicht!
Die Pfadsprachen aller e.v. g. Bäume sind genau die $L \subseteq \mathbb{N}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & L \neq \emptyset \\ \text{(ii)} & u,v \in \mathbb{N}^*,\ uv \in L \Rightarrow u \in L\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon \in L$$

(iii) $ub \in L,\ a,b \in \mathbb{N},\ a < b \Rightarrow ua \in L$

Wie steht es dabei eigentlich mit unendlichen Pfaden/ unendlichen Bäumen? – Erlaubt? Bereits mit erledigt? Mit einem kleinen Trick erledigbar?

Tipps zu E5 bereits vorhanden

AL-Formeln, Wahrheitswerte, Wahrheitstabellen

9. Alternative Schreibweisen

Beschreiben Sie, wie sich die (a) Infix-, (b) polnische und (c) umgekehrt polnische Schreibweise einer aussagenlogischen Formel aus der Baumdarstellung ergeben.

Lösung 9

a) Infix(Baum): [pseudoprogrammiersprachlich]

```
IF Wurzel(Baum) ist Blatt THEN write(Wurzel(Baum))
ELSE IF Wurzel(Baum) ist ¬ THEN
     BEGIN write(‚¬’); Infix(Kindbaum) END
ELSE IF Wurzel(Baum) ist 2-stelliger Junktor j THEN
     BEGIN     write(‚(’);
               Infix(linker Kindbaum);
               write(j);
               Infix(rechter Kindbaum);
               write(‚)’);
     END;
```

b1) Ab Wurzel *linke* Hand an den Baum, Hand dranlassen und rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *ersten* Passieren aufschreiben.

b2) Polish(Baum): [pseudoprogrammiersprachlich]

```
IF Wurzel(Baum) ist Blatt THEN write(Wurzel(Baum))
ELSE IF Wurzel(Baum) ist ¬ THEN
     BEGIN write(‚¬’); Polish(Kindbaum) END
ELSE IF Wurzel(Baum) ist 2-stelliger Junktor j THEN
     BEGIN     write(j);
               Polish(linker Kindbaum);
               Polish(rechter Kindbaum);
     END;
```

c1) Ab Wurzel *linke* Hand an den Baum, Hand dranlassen und rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *letzten* Passieren aufschreiben.

c2) Ab Wurzel *rechte* Hand an den Baum, Hand dranlassen, rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *ersten* Passieren aufschreiben. Am Ende Formel *umdrehen*.

c3) pseudoprogrammiersprachlich …

10. Rekursive Funktionen auf Formeln

Definieren Sie „vernünftig“ $Sub(\varphi)$, $Grad(\varphi)$ und $Tiefe(\varphi)$.

Lösung 10

$Sub : Form \to \mathbf{P}(Form)$

$Sub(A_i) := \{A_i\}$

$Sub(\neg\varphi) := Sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$

und für $\mathbf{j}$ = ∧, ∨, →, bzw. ↔: $Sub(\varphi\, \mathbf{j}\, \psi) := Sub(\varphi) \cup Sub(\psi) \cup \{(\varphi\, \mathbf{j}\, \psi)\}$

$Grad : Form \to \mathbb{N}_0$

$Grad(A_i) := 0$

$Grad(\neg\varphi) := Grad(\varphi) + 1$

und für $\mathbf{j}$ = ∧, ∨, →, bzw. ↔: $Grad(\varphi\, \mathbf{j}\, \psi) := Grad(\varphi) + Grad(\psi) + 1$

$Tiefe : Form \to \mathbb{N}_0$

$Tiefe(A_i) := 0$

$Tiefe(\neg\varphi) := Tiefe(\varphi) + 1$

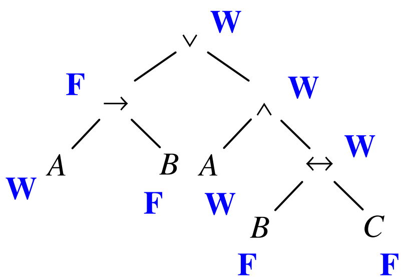
und für $\mathbf{j}$ = ∧, ∨, →, bzw. ↔: $Tiefe(\varphi\, \mathbf{j}\, \psi) := \max(Tiefe(\varphi) + Tiefe(\psi)) + 1$

11. Wahrheitswert, rekursiv

a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum der Formel $(A \to B) \vee (A \wedge (B \leftrightarrow C))$.

b) Schreiben Sie an alle Knoten dieses Syntaxbaumes den zugehörigen Wahrheitswert unter der Belegung $A \mapsto$ W, $B \mapsto$ F, $C \mapsto$ F.

Lösung 11



12. Junktoren in natürlicher Sprache

Schreiben Sie die folgenden Sätze jeweils sinn- und möglichst textgetreu als eine AL-„Formel“, in der Sätze natürlicher Sprache mit Junktoren verbunden sind. Ignorieren Sie dabei wertende Beiklänge.

Beispiel:

Franz und Nadia sind Studenten. ↦ (Franz ist Student) ∧ (Nadia ist Studentin)

a) Wenn du fährst, fahre ich auch.

b) Ich fahre nur wenn du auch fährst.

c) Weil du fährst, fahren er und ich auch.

d) Ich fahre nicht, es sei denn, du fährst auch.

e) Es regnet morgen, vielleicht aber auch erst übermorgen.

f) Linda arbeitet, obwohl sie krank ist.

g) Tim ist ein guter Tänzer und Schwimmer.

h) Wenn Franz singt, dann nervt er.

i) Wenn Franz singt, dann nervt das.

Lösung 12 Teilsätze sind abgekürzt wiedergegeben:

a) Df $\to$ If
b) If $\to$ Df (auch If $\leftrightarrow$ Df ?)
c) Df $\wedge$ (Ef $\wedge$ If)
d) If $\to$ Df (auch If $\leftrightarrow$ Df ?)
e) rm $\vee$ rüm
f) La $\wedge$ Lik
g) TigT $\wedge$ TigS
h) Fs $\to$ Fn
i) Fs $\to$ F's Gesang nervt

Bemerkung 1: Beachten Sie die sprachlichen Varianten von $\to$ und $\wedge$.
Bemerkung 2: Gelegentlich (vgl. z.B. d) würde man im Alltag evtl. „fairerweise" $\leftrightarrow$ anstatt $\to$ als gemeint erwarten → Interpretationsdivergenzen!
Bemerkung 3: (i) ist verschieden von (h): Es könnte in (h) ja sein, dass sein Gesang OK ist, dass er aber beim Singen übertrieben theatralische Gesten macht etc. Außerdem kann man bei (i) noch diskutieren, ob mit *das* F's *derzeitiger* Gesang gemeint ist, und ob damit die zweite Aussage, wenn F gerade nicht singt, falsch oder sinnlos (keine Aussage) ist.

13. Wahrheitswerteverlauf, Wahrheitstafel

a) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \to B) \vee (\neg B \wedge A)$.

Lösung 13a

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$(\neg B \wedge A)$	$(A \to B) \vee (\neg B \wedge A)$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	F	W

A	$\to$	B	$\vee$	$\neg$	B	$\wedge$	A
W	W	W	W	F	W	F	W
W	F	F	W	W	F	W	W
F	W	W	W	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F	F	F

Alternativ in *modifizierter Tabellenform*:

Man schreibt von jeder Teilformel nur den „obersten Operator", dafür aber meist einige Teilformeln mehrfach.

b) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $((A \to B) \to C) \wedge \neg(B \vee C)$.

Lösung 13b

A	B	C	$A \to B$	$(A \to B) \to C$	$B \vee C$	$\neg(B \vee C)$	$((A \to B) \to C) \wedge \neg(B \vee C)$
W	W	W	W	W	W	F	F
W	W	F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	W	W	F	F
W	F	F	F	W	F	W	W
F	W	W	W	W	W	F	F
F	W	F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W	F	F
F	F	F	W	F	F	W	F

kein **Tipp** zu **E6**

14. Andere Junktoren

Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \uparrow (B \rightarrow (A \downarrow (B \leftarrow A))))$.

Lösung 14

A	B	$B \leftarrow A$	$A\downarrow(B\leftarrow A)$	$B\rightarrow(A\downarrow(B\leftarrow A))$	$A\uparrow(\ldots)$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F
F	W	W	F	F	W
F	F	W	F	W	W

15. Junktoren und Operatoren

a) Geben Sie die 4 einstelligen logischen Operatoren(semantiken) an.
b) Gibt es nullstellige?

Lösung 15 a,b

a)

A	$\top$	$\bot$	A	$\neg A$
W	W	F	W	F
F	W	F	F	W

b) Im $\top\bot$-Dialekt die beiden Konstanten.

c) Schreiben Sie eine Wahrheitstafel für if-then-else.

Lösung 15 c

A	B	C	$A \rightarrow B / C$
W	W	W	W
W	W	F	W
W	F	W	F
W	F	F	F

A	B	C	$A \rightarrow B / C$
F	W	W	W
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

d) Ergänzungsaufgabe Wie viele der n-stelligen Junktoren (Werteverläufe) hängen echt von allen n Argumenten ab (und wie formalisiert man diese Abhängigkeit?) [Beantworten Sie zunächst die Frage in Klammern.]
Die allgemeine Anzahl als Funktion von n ist für kleine n zu bestimmen. Eine geschlossene Formel oder induktive Definition für alle n bleibt Ihnen überlassen..

Tipp 15d (Formaliserungsteil)

$f(A_1,\ldots,A_n)$ ist „eigentlich unabhängig" von A_i, wenn für alle Belegungen

$$f(A_1,\ldots,A_n) = f(A_1,\ldots,A_{i-1},\neg A_i, A_{i+1},\ldots,A_n).$$

Andernfalls (von keinem Argument unabhängig) hängt f echt von allen Argumenten ab.

(Anzahl für kleine *n*)

Von den vier 1-stelligen Operatoren (booleschen Funktionen) sind 2 von mindestens einem Argument eigentlich unabhängig. Von den 16 2-stelligen Junktoren sind 6 eigentlich von mindestens einem Argument unabhängig.

Tipps zu E6 Erste Werte für n = 0,1,2,3 ermitteln. Dann Bildungsregel erraten oder als Folgenanfang bei OEIS eingeben.

Semantische Begriffe

16. Semantische Kategorien von Formeln

Welche der folgenden Formeln sind ...

	erfüllbar	unerfüllb.	konting.	allgemeing.	widerlegb.?
a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$					
b) $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$					
c) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$					

Geben Sie im Falle der Kontingenz jeweils ein Modell bzw. Gegenbeispiel an, und geben Sie im Falle der Allgemeingültigkeit bzw. Unerfüllbarkeit eine Begründung.

Lösung 16

	erfüllbar	unerfüllb.	konting.	allgemeing.	widerlegb.?
a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	x	–	–	x	–
b) $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	x	–	x	–	x
c) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$	–	x	–	–	x

Begründungen:

a) Formlose Begründung: $(A \leftrightarrow B)$ ist W $\Leftrightarrow$ A und B sind W, oder A und B sind F.
$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ ist W $\Leftrightarrow$ A und B sind W, oder A und B sind F.
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ ist immer W, wenn beide Seiten den gleichen Wert haben, also (s.o.) immer.

b) Modell: z.B. A,B sind W. Gegenbeispiel? Dann müsste $(A \vee B)$ W und $(A \rightarrow B)$ F sein. Wegen letzterem müsste A W und B F sein. Dies klappt als Gegenbeispiel.

c) Formlose Begründung: In einem Modell dürfte wegen $(A \rightarrow B)$ nicht gleichzeitig A W und B F sein und muss wegen $(A \wedge \neg B)$ gleichzeitig A W und B F sein. Das geht also nicht.

ODER jeweils: Formelle Begründung, Modelle, Gegenbeispiele mit Wahrheitstafel

17. Tautologien und Wahrheitstafeln

a) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Distributivität von *oder* über *und*, d.h. dass $((P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ eine Tautologie ist.

Lösung 17a

P	Q	R	$Q \wedge R$	links: $P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	rechts: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	links $\leftrightarrow$ rechts
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	F	F	F	F	W

b) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Implikationsauflösung, d.h. dass $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ eine Tautologie ist.

Lösung 17b

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W

18. Kombinatorische Aufgaben – und ihre Grenzfälle

a) Anne sagt: Bea und Chris werden als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Anne hat gerade gelogen.
Chris sagt dann: Anne hat gerade die Wahrheit gesagt.
Wer hat gelogen, wer nicht?

Lösung 18a

A, B, C: Anne, Bea, Chris sagt in ihrer obigen Aussage die Wahrheit.
$\neg A$, $\neg B$, $\neg C$: Anne, Bea, Chris lügt in ihrer obigen Aussage.
Die drei Fakten bedeuten dann $(A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$, $B \leftrightarrow \neg A$ und $C \leftrightarrow A$.
Gesucht ist die (hoffentlich einzige) Belegung von A, B, C, die alle drei Fakten wahr macht.
Mit Wahrheitstafel ergibt sich: Bea sagt die Wahrheit; Anne und Chris lügen.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg C$	$A \leftrightarrow \ldots$	$\neg A$	$B \leftrightarrow \neg A$	$C \leftrightarrow A$
W	W	W	F	F	F	F	F	F	W
W	W	F	F	W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	F	F	F	F	W	W
W	F	F	W	W	W	W	F	W	F
F	W	W	F	F	F	W	W	W	F
F	**W**	**F**	F	W	F	**W**	W	**W**	**W**
F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	F	W	W	W	F	W	F	W

b) Anne sagt: Bea wird als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Chris wird als Nächstes lügen.
Chris sagt dann: Anna hat gerade gelogen.

Wer hat gelogen, wer nicht?
Was geht jetzt schief? Ist die Aufgabe gut gestellt? Ist es nicht so, dass jeder jeweils entweder gelogen oder die Wahrheit gesagt haben muss?

Lösung 18b

Mit der obigen Methode stellt sich heraus, dass *keine Belegung* die Wissensbasis – $A \leftrightarrow \neg B$, $B \leftrightarrow \neg C$ und $C \leftrightarrow \neg A$ – erfüllt. Man kann nicht einmal sagen, dann hätten halt alle gelogen, denn dann müsste ja die Belegung $A, B, C \mapsto$ F die Wissensbasis erfüllen. Mindestens einige der Aussagen sind also *weder wahr noch gelogen*, sondern *unsinnig*! Und die Aufgabe ist damit falsch gestellt.

Das bekannteste Beispiel dieser Art ist das Lügner-Paradoxon „Ich lüge immer“ (oder „Ich lüge eben gerade“, oder –klassisch – ein Kreter sagt: „Alle Kreter lügen immer,“ usw.). Solche Probleme treten immer dann auf, wenn sich Aussagen *zyklisch* auf sich selbst beziehen, sei es direkt oder über andere Aussagen als Zwischenstationen.

Sie treten nicht auf, wenn eine erste Aussage klar wahr oder falsch ist und ansonsten stets höchstens von früher gemachten Aussagen die Rede ist (aber nicht von gegenwärtigen oder zukünftigen). Zum Beispiel: Anne sagt: „Fünf ist eine gerade Zahl“, und Bea reagiert mit: „Das stimmt nicht.“

c) Anne sagt: Ich sage gerade die Wahrheit.

Hat sie gelogen oder nicht? Ist die Aufgabe gut gestellt?

Lösung 18c

Sagt Anne „Ich sage gerade die Wahrheit“ (A), und wäre diese Aussage sinnvoll, dann wäre A genau dann *wahr*, wenn Anne die Wahrheit sagt, denn $A \leftrightarrow A$, und *unwahr*, wenn Anne lügt, denn $A \leftrightarrow \neg\neg A$. Diese Wissensbasis ist mit *beiden* möglichen Belegungen von A erfüllt. Annes Aussage könnte sowohl *wahr* als auch *falsch* sein. Die Aufgabe ist also nicht gut gestellt, da sie zwei Lösungen hat.

d) Ist Aufgabe (a) überhaupt gut gestellt?

Lösung 18d

Trotz der oben gefundenen „Lösung“ könnte man auch argumentieren, dass (a) *falsch gestellt* – ja *unsinnig* – ist, da die Inhalte und Wahrheitswerte der zu beurteilenden Aussagen zyklisch – also eigentlich gar nicht – definiert sind. Genauso könnte man übrigens urteilen, dass (c) *unsinnig* ist.

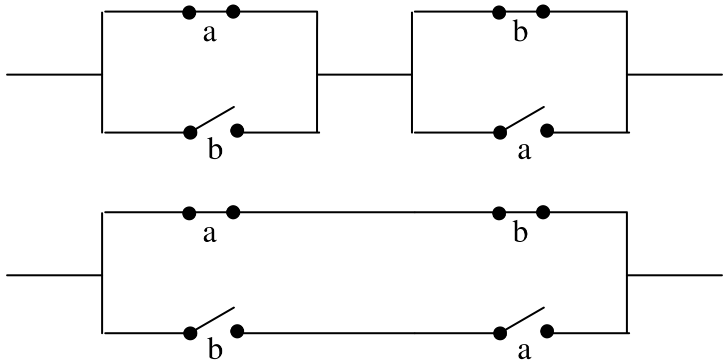
Zusatzaufgabe: Beurteilen Sie nun aus logischer Sicht den Nutzen von Aussagen wie „Diese Erklärung gebe ich im Vollbesitz meiner geistigen Kräfte, freiwillig und ohne Zwang ab.“, die für Vollmachten und Verfügungen empfohlen werden. ☹

kein Tipp zu **E7**

$\boxed{\text{Syntax/Semantik}}$

19. Boolesche Schaltwerke

a) Vergleichen Sie die beiden folgenden Schaltwerke. Berechnen Sie dazu deren Formeldarstellungen, und zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln und/oder Tautologien, dass sie bei den gleichen Schalterstellungen leiten.



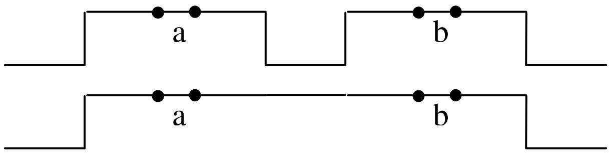
Lösung 19a

Vier Wege zum Äquivalenzbeweis:

(1) Man vergleicht die Existenz leitender Wege bei allen Schalterstellungskombinationen und stellt fest: jeweils oben und unten gleichzeitig ja oder gleichzeitig nein.
Beispiel (1 von 4): *a* aus, *b* aus:

Oben leitet der Weg

Unten leitet der Weg



Oder man berechnet die Formeldarstellungen,
oben: $\varphi := (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$
unten: $\psi := (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$,
und zeigt mit Wahrheitstafel …

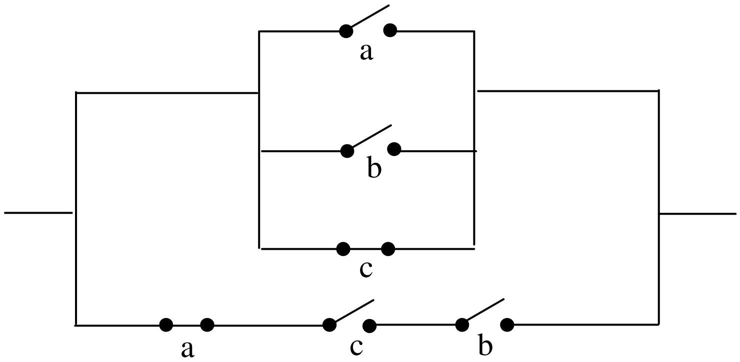
(2) φ und ψ haben den gleichen Wahrheitswerteverlauf, bzw.
(3) $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist eine Tautologie

(klar wie das geht)

(4) Mit einer Kette mittels Tautologien und Ersetzungssatz gerechtfertigter Äquivalenzen zeigt man, dass $\varphi \equiv \psi$:

	<u>wegen Tautologie:</u>
$\varphi = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	
$\equiv (\neg A \wedge (\neg B \vee A)) \vee (B \wedge (\neg B \vee A))$	Distributivität
$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$	2× Distributivität
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee \bot \vee \bot \vee (B \wedge A)$	Tertium non Datur*
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$	2× Absorption
$= \psi$	Kommutativität
	*)weglassbar

b) Berechnen Sie mit Formeldarstellung und Wahrheitstafel alle Schalterstellungs-Kombinationen, bei denen das folgende Schaltwerk leitend verbindet. Versuchen Sie es daraufhin zu vereinfachen.



Lösung 19b
a) Entsprechende Formel (vgl.u.): $a \vee b \vee \neg c \vee (\neg a \wedge c \wedge b)$.

Wahrheitstafel: (vgl.u.)

a	b	c	$\neg c$	$a \vee b \vee \neg c$	$\neg a$	$\neg a \wedge c \wedge b$	$(a \vee b \vee \neg c) \vee (\neg a \wedge c \wedge b)$
W	W	W	F	W	F	F	W
W	W	F	W	W	F	F	W
W	F	W	F	W	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	F	W
F	F	W	F	F	W	F	F
F	F	F	W	W	W	F	W

Also alle Schalterstellungen leiten bis auf: a **aus**, b **aus**, c **an**
Erläuterungen und Lösungsweg-Alternativen:
Wir haben aus Platzgründen dreifache Kon- und Disjunktionen (UND- bzw. ODER-Ketten) auf einen Schlag (wie dreistellige Junktoren) berechnet. Wenn Ihnen das zu gewagt ist, können Sie die Formel zur gewohnten schematischen Anwendung der Wahrheitstafel noch weiter klammern, so dass Sie beispielsweise mit $((a \vee b) \vee \neg c) \vee ((\neg a \wedge c) \wedge b)$ rechnen. Sie könnten aber auch ein 4-stelliges ODER wagen. Sie erhalten je nach Vorgehen mehr oder weniger Spalten in der Tafel, aber dasselbe Ergebnis.

b) Durch Vergleich der fünften mit der letzten Tabellenspalte sehen wir, dass $a \vee b \vee \neg c$ zur ganzen Formel äquivalent ist. Also können wir die untere Reihenschaltung komplett weglassen.

20. Substitution

Zeigen Sie, in welchem Sinne durch den Substitutionssatz die Variablen *P*, *Q*, … für beliebige Aussagevariablen A_i überflüssig werden – z.B. in $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

Lösung 20
Wir brauchen z.B. durch *P* nicht zu betonen, dass es für beliebige Aussagvariablen anstelle von *P* gilt (natürliche immer dieselbe Aussagvariable A_i für *P*). Stattdessen schreiben wir die Tautologie z.B. als $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$, und der Substitutionssatz sagt uns, dass wir für *A* und *B* beliebige Aussagevariablen einsetzen dürfen (sogar beliebige Formeln!).

21. Substitution – (Gegen-)Beispiele

a) Geben Sie eine passende widerlegbare AL-Formel und eine Substitution an, so dass die Formel durch die Substitution in eine Tautologie überführt wird.

Lösung 21 a
Beispiel: $A\vee\neg B$ ist kontingent, insbesondere widerlegbar, keine Tautologie; Substitution $[A/B]$ ergibt die Tautologie $B\vee\neg B$.

b) Geben Sie eine AL-Formel und eine Substitution für A und eine Substitution für B an, derart dass beide Hintereinanderausführungen der Substitutionen und deren gleichzeitige Ausführung drei Formeln ergeben, von denen keine zwei äquivalent sind.

Lösung 21 b
Beispiel: Aus der Formel $A\wedge B$ wird unter den Substitutionen $[A/B]$ $[B/A]$ die Formel $A\wedge A$, unter den Substitutionen $[B/A]$ $[A/B]$ $B\wedge B$ und unter der gleichzeitigen Substitution $[A,B\,/B,A]$ die Formel $A\wedge B$. Keine zwei dieser drei Formeln sind äquivalent.

22. Substitution –Hintereinanderausführung

Zeigen Sie: Jede gleichzeitige Substitution an einer Formel ist eine Hintereinanderausführung von Einzelsubstitutionen $[\,A_i\,/\,\varphi_i\,]$.

Vorsicht: Man kann dazu nicht einfach die gleichzeitigen Ersetzungen der einzelnen Aussagevariablen hintereinanderschalten (Warum?).

Tipp: Wie vertauscht man in einem Programm die Werte von a und b?

Lösung 22

Vorsicht-Antwort (Beispiel): $(A\vee B)_{[A,B\,/\,B,A]} \not\equiv (A\vee B)_{[A\,/\,B][B\,/\,A]}$

Tipp-Antwort: Man verwendet dazwischen eine „neutrale“ Variable, z.B. c: c:=a; a:=b; b:=c.

Zeige-Antwort: Es sei φ eine AL-Formel, und es seien die Aussagevariablen $Q_1,\dots,Q_n$ verschieden
- voneinander,
- von allen $P_1,\dots,P_n$,
- von allen Aussagevariablen in φ und $\psi_1,\dots,\psi_n$.

Dann ist $\varphi_{[P_1,\dots,P_n\,/\,\psi_1,\dots,\psi_n]} \equiv \varphi_{[P_1\,/\,Q_1]\dots[P_n\,/\,Q_n][Q_1\,/\,\psi_1]\dots[Q_n\,/\,\psi_n]}$.

kein Tipp zu **E8**

23. Ersetzungen

Leiten Sie mittels Ersetzungs- und Äquivalenzsatz aus bekannten Tautologien ab, dass gilt:
$P\to Q \quad\equiv\quad \neg(Q\wedge Q)\to\neg(P\vee\bot)$.

Lösung 23
In *Tautologien* mit oberstem Junktor $\leftrightarrow$ können wir diesen durch $\equiv$ ersetzen (Äquivalenzsatz), und $\equiv$ ist natürlich (wieso natürlich?) transitiv.
Also folgt $P\to Q\equiv\neg Q\to\neg P$ aus der *Kontraposition*,
$Q\equiv Q\wedge Q$ aus der *Idempotenz* und $P\equiv P\vee\bot$ aus dem *Absorptionsgesetz*,
insgesamt mit dem Ersetzungssatz also $\neg Q\to\neg P\equiv\neg(Q\wedge Q)\to\neg(P\vee\bot)$,
und wegen der Transitivität von $\equiv$ schließlich $P\to Q \quad\equiv\quad \neg(Q\wedge Q)\to\neg(P\vee\bot)$.

24. Junktorenbasen

a) Suchen Sie über den Basen $\{\neg, \wedge, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils eine möglichst einfache Formel für $P \to (\neg Q \to \neg P)$.

Lösung 24 a

a) Die Wahrheitstafel liefert

P	Q	usw.	$P \to (\neg Q \to \neg P)$
W	W		W
W	F		F
F	W		W
F	F		W

Über die W-Zeilen erhalten wir $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
Mit ODER-Ersetzung $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ könnten wir diese Formel in eine längere über $\{\neg, \wedge\}$ äquivalent umformen (üben!).
Aus der F-Zeile erhalten wir übrigens schneller und kürzer: $\neg(P \wedge \neg Q)$.
Mit den Tautologien *Anti-Distributivität* und *doppelte Negation* können wir wiederum zu $\neg P \vee Q$ gelangen.

b) Verwenden Sie den Satz „Von Junktorenbasen zu Junktorenbasen“, um zu zeigen, dass $\{\neg, \to\}$ eine Junktorenbasis ist, und suchen Sie über der Basis eine möglichst einfache Formel für $P \wedge Q$ und für $P \vee Q$.

Lösung 24 b

b) $P \vee Q \equiv \neg P \to Q \equiv \neg Q \to P$
Wie kommt man drauf?
Z.B. über Kontraposition oder $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ und *Doppelnegation*!
$P \wedge Q \equiv \neg(P \to \neg Q)$
Wie kommt man drauf? Z.B. über $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$ und das erste Ergebnis!
Da z.B. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ eine Basis ist und alle drei durch $\{\neg, \to\}$ und $\{\neg, \to\}$ ausgedrückt werden können, folgt die Basiseigenschaft von $\{\neg, \to\}$ aus dem Satz *Von Junktorenbasen zu Junktorenbasen*.

kein Tipp zu E8

25. ITE-Form erzeugen

Wandeln Sie die Formel $(B \to A) \wedge (A \vee B)$ in ITE-Form um –

a) durch Auswertung mittels Wahrheitstafel und anschließende Formelsynthese,

Lösung 25 a

A	B	$B \to A$	$A \vee B$	$(B \to A) \wedge (A \vee B)$
W	W	W	W	W
W	F	W	W	W
F	W	F	W	F
F	F	W	F	F

Liest man die W/F-Unterscheidungen von A und B und $(B \to A) \wedge (A \vee B)$ als binären Baum, ergibt sich

$$(B \to A) \wedge (A \vee B) \equiv \quad A \to (B \to \top / \top) \;/\; (B \to \bot / \bot)$$

Vergleicht man die Spalten von B und $(B \to A) \wedge (A \vee B)$, erkennt man übrigens die kürzere äquivalente ITE-Formel A.

b) durch Shannon-Expansionen zuerst nach A und dann nach B, dann Konstanten-Berechnung an den „Blättern“,

Lösung 25 b

Expansion nach A:

$$(B \to A) \wedge (A \vee B) \equiv A \to ((B \to \top) \wedge (\top \vee B)) / ((B \to \bot) \wedge (\bot \vee B))$$

weitere Expansion nach B:

$$\equiv B \to [A \to ((\top \to \top) \wedge (\top \vee \top)) / ((\top \to \bot) \wedge (\bot \vee \top))]$$
$$/ \quad [A \to ((\bot \to \top) \wedge (\top \vee \bot)) / ((\bot \to \bot) \wedge (\bot \vee \bot))]$$

Nach Auswertung der konstanten Teilformeln:

$$\equiv B \to (A \to \top / \bot) / (A \to \top / \bot)$$

c) durch Shannon-Expansionen zuerst nach B und dann nach A, dann Konstanten-Berechnung an den „Blättern“,

Lösung 25 c

Expansion nach B:

$$(B \to A) \wedge (A \vee B) \equiv B \to ((\top \to A) \wedge (A \vee \top)) / ((\bot \to A) \wedge (A \vee \bot))$$

weitere Expansion nach A:

$$\equiv A \to [B \to ((\top \to \top) \wedge (\top \vee \top)) / ((\bot \to \top) \wedge (\top \vee \bot))]$$
$$/ \quad [B \to ((\top \to \bot) \wedge (\bot \vee \top)) / ((\bot \to \bot) \wedge (\bot \vee \bot))]$$

Nach Auswertung der konstanten Teilformeln:

$$\equiv A \to [B \to \top / \top] / [B \to \bot / \bot]$$

d) indem Sie die drei Junktoren durch ITE ersetzen.

Lösung 25 d

Freihändig oder mittels Wahrheitstafel macht man sich klar, dass

$$\begin{aligned} B \to A &\equiv B \to A / \top \\ A \vee B &\equiv A \to \top / B \\ A \wedge B &\equiv A \to B / \bot \end{aligned}$$

Beim Einsetzten wird aus der Formel $(B \to A) \wedge (A \vee B)$ die Formel

$$(B \to A / \top) \to (A \to \top / B) / \bot$$

Interessant: In (a) bis (c) hatten unsere ITE-Ergebnisse vor jedem Pfeil eine Aussagevariable Das muss aber in ITE-Formeln nicht unbedingt so sein, wie das Ergebnis von (d) zeigt. also ist die bisherige spezielle Form eine Art ***Normalform***, in der es zu jeder AL-Formel eine äquivalente gibt.

e) Wie kann man in den Ergebnissen die Konstanten $\top$ und $\bot$ durch ITE und ¬ ersetzen?

Lösung 25 e

$$\left.\begin{aligned} \top &\equiv A \to A / \neg A \\ \bot &\equiv A \to \neg A / A \end{aligned}\right\}, \text{ denn } \left\{\begin{aligned} &(A \to A) \wedge (\neg A \to \neg A) \text{ ist allgemeingültig.} \\ &(A \to \neg A) \wedge (\neg A \to A) \text{ ist unerfüllbar.} \end{aligned}\right.$$

Also bildet {ITE, ¬} eine ***Junktorenbasis*** (auch bereits ohne die Konstanten $\top$ und $\bot$).

26. Folgerungen aus Formelmengen

Welche der folgenden Folgerungen sind korrekt? Belegen Sie Ihre Antwort mit Wahrheitstafeln.

a) $\{A \vee B, B \to A\} \models A$

Lösung 26a

A	B	$A \vee B$	$B \to A$	Wo $\models$ Formelmenge?	und dort $\models A$?
W	W	**W**	**W**	hier	ja
W	F	**W**	**W**	hier	ja
F	W	W	F		
F	F	F	W		

<u>Folgerung korrekt</u>

b) $\{(A \vee B) \to A, A \to (A \vee B)\} \models \neg(A \wedge \neg B)$

Lösung 26b

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \to A$	$A \to (A \vee B)$	Wo $\models$ FM?	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
W	W	W	**W**	**W**	hier	F	F	**W**
W	F	W	**W**	**W**	hier	W	W	**F**
F	W	W	F	W		F	F	W
F	F	F	**W**	**W**	hier	W	F	**W**

<u>keine Folgerung</u>

KNF und Resolution

27. Konjunktive Normalform verwenden

Welche der folgenden KNF-Formeln sind allgemeingültig?

a) $(B \vee C \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee C \vee A)$

b) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\}\}_{KNF}$

c) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\neg C, C\}, \{\neg B, B, C\}\}_{KNF}$

Lösung 27: Enthält jede Klausel eine Aussagevariable und ihre Negation?

(a) nein (2. Klausel ist F unter Belegung „A:=B:=F")
(b) nein (Leere Klausel ist sogar stets F)
(c) ja

28. Konjunktive Normalform erzeugen

a) Bringen Sie $\neg(A \to (B \vee C))$ in KNF-Form mittels

i. Synthese aus Wahrheitstafel (KNF1)

Lösung 28 a.i Die Lösung gemäß KNF1 umfasst 21 Literale (7 Zeilen à 3, s.u.).
Mit einer guten Idee (s. Pfeilbox unten) geht es hier sogar mit nur 3!

A	B	C	$B \vee C$	$A \to (B \vee C)$	$\neg(A \to (B \vee C))$	
W	W	W	W	W	F	→ $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge$
W	W	F	W	W	F	→ $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge$
W	F	W	W	W	F	→ ⋮
W	F	F	F	F	W	⇐ $\boxed{A \wedge \neg B \wedge \neg C}$ (kürzer: Dualkl. ist KNF + DNF!)
F	W	W	W	W	F	→ ⋮
F	W	F	W	W	F	→ ⋮
F	F	W	W	W	F	→ ⋮
F	F	F	F	W	F	→ $(A \vee B \vee C)$

ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, KNF2):

Lösung 28 a.ii

Ausgangsformel	$\neg(A \to (B \vee C))$
Elimination von Implikation →	$\neg(\neg A \vee (B \vee C))$
Negation näher zu den AV'n →	$\neg\neg A \wedge \neg(B \vee C)$
Doppelnegation beseitigen →	$A \wedge \neg(B \vee C)$
Negation näher zu den AV'n →	$A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$
Klammern weglassen →	$\boxed{A \wedge \neg B \wedge \neg C}$

b) Bringen Sie $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C)$ in KNF-Form mittels
i. Synthese aus Wahrheitstafel (KNF1)

Lösung 28 b.i

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$	
W	W	W	W	W	
W	W	F	W	F	$\longrightarrow$ $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge$
W	F	W	F	W	
W	F	F	F	W	
F	W	W	F	W	
F	W	F	F	W	
F	F	W	W	W	
F	F	F	W	F	$\longrightarrow$ $(A \vee B \vee C)$

ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, KNF2):

Lösung 28 b.ii

Ausgangsformel $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$.
Elimination von Äquivalenz → $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow C$.
2× parallel Elimination von Implikation →→ $((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \rightarrow C$.
Elimination von Implikation → $\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee C$.
Negation näher z. d. AV'n → $(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A)) \vee C$.
2× parallel Negation näher z. d. AV'n → $((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A)) \vee C$.
2× parallel Negation beseitigen → $((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee C$.
Konjunktion wegrücken → $(((A \wedge \neg B) \vee B) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee \neg A)) \vee C$
Konjunktion wegrücken → $(((A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)) \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A))) \vee C$.
überflüssige Klammern weg → $((A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \vee C$
Konjunktion wegrücken → $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C)$
Aufgrund von (welchen?) Tautologien können wir die mittleren beiden Klauseln weglassen.
Syntaktische Umformung ist nicht immer schneller als die Synthese aus der Wahrheitstafel.

29. KNF-Umformung und Resolution anwenden

a) Formen Sie $\neg\big((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))\big)$ in KNF um.
Begründen und verwenden Sie bei Bedarf das KNF2-„Makro“ $\neg(P \to Q)$ → $P \wedge \neg Q$

Lösung 29a

Wir formen hier im Wesentlichen nach den „syntaktischen Umformungsegeln“ um, verwenden aber auch als „Makro“ eine andere Tautologie, die uns rascher voranbringt: Das Makro „Wann ist eine Implikation falsch?“ besteht aus drei Schritten hintereinander:

Ausgangsformel		$\neg(P \to Q)$
Implikationen eliminieren	→	$\neg(\neg P \vee Q)$
Negation näher zu den AV’n	→	$\neg\neg P \wedge \neg Q$
Doppelnegation beseitigen	→	$P \wedge \neg Q$

Ausgangsformel		$\neg\big((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))\big)$
Wann ist eine Implikation falsch?	→	$(A \to B) \wedge \neg((C \to A) \to (C \to B))$
… und nochmal	→	$(A \to B) \wedge ((C \to A) \wedge \neg(C \to B))$
… und nochmal	→	$(A \to B) \wedge ((C \to A) \wedge (C \wedge \neg B))$
Implikationen eliminieren	→	$(\neg A \vee B) \wedge ((\neg C \vee A) \wedge (C \wedge \neg B))$
entbehrliche Klammern weg	→	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee A) \wedge C \wedge \neg B$
ist KNF, anders geschrieben auch:		$\{\{\neg A, B\},\ \{\neg C, A\},\ \{C\},\ \{\neg B\}\}_{KNF}$

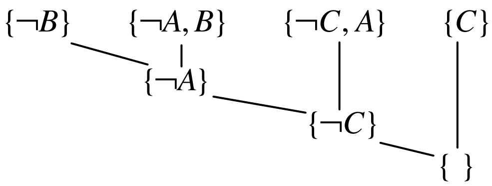
Umformungs-Makros müssen natürlich nicht verwendet werden; es geht auch „normal“ mit KNF2 bzw. mit Wahrheitstafel (KNF1).

b) Entscheiden Sie mittels Resolution, ob $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ allgemeingültig ist. Verwenden Sie Teil (a).

Lösung 29b

$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ ist genau dann allgemeingültig, wenn die Negation unerfüllbar ist. $\neg\big((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))\big)$ ist genau dann unerfüllbar, wenn aus einer seiner KNF-Formen (z.B. nach (a) $\{\{\neg A, B\},\ \{\neg C, A\},\ \{C\},\ \{\neg B\}\}_{KNF}$) per Resolution die leere Klausel erzeugbar ist.

Resolution:



Also ist $\{\{\neg A, B\},\ \{\neg C, A\},\ \{C\},\ \{\neg B\}\}_{KNF}$
unerfüllbar und $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ tatsächlich Tautologie.

Bemerkung zu 29b:
Natürlich können Sie auch $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ in eine **äquivalente KNF-Formel** verwandeln (nicht ganz ohne Mühe), an der sie die **Allgemeingültigkeit** dann **unmittelbar ablesen** können (siehe P-¬P-Paare in allen Klauseln).

Skizze:

$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ z.B. mehrfach Implikationen auflösen →→→→→

$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg C \vee A) \vee (\neg C \vee B))$ ¬(...∨...) auflösen, ¬¬ weg →→→→

$(A \wedge \neg B) \vee ((C \wedge \neg A) \vee (\neg C \vee B))$ Distributivität von rechts →

$(A \vee [(C \wedge \neg A) \vee (\neg C \vee B)]) \wedge (\neg B \vee [(C \wedge \neg A) \vee (\neg C \vee B)])$ … und noch 2x →→

$(A \vee [(C \vee (\neg C \vee B)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))] \wedge$
$\neg B \vee [(C \vee (\neg C \vee B)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))]$ … und noch 2x von links →→

$(A \vee \boxed{C} \vee \boxed{\neg C} \vee B) \wedge (\boxed{A} \vee \boxed{\neg A} \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \boxed{C} \vee \boxed{\neg C} \vee B) \wedge (\boxed{\neg B} \vee \neg A \vee \neg C \vee \boxed{B})$

30. Disjunktive Normalform verwenden

Welche der folgenden DNF-Formeln sind erfüllbar, welche sind unerfüllbar, welche allgemeingültig?

a) $(B \wedge C \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge C \wedge A)$

b) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\}\}_{DNF}$

c) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\neg C, C\}, \{\neg B, C\}\}_{DNF}$

Lösung 30:	Enthält jede Dualklausel eine Aussagevariable und ihre Negation?
	(a) ja (also unerfüllbar)
	(b) nein(also erfüllbar). Leere Dualklausel ist stets W: allgemeingültig
	(c) nein (also erfüllbar)

31. Disjunktive Normalform erzeugen

a) Verwandeln Sie $\neg(A \to (B \vee C))$ in eine DNF-Formel mittels

i. Synthese aus Wahrheitstafel (DNF1),

Lösung 31 a.i

A	B	C	$B \vee C$	$A \to (B \vee C)$	$\neg(A \to (B \vee C))$	
W	W	W	W	W	F	
W	W	F	W	W	F	
W	F	W	W	W	F	
W	F	F	F	F	W	$\Leftarrow$ $A \wedge \neg B \wedge \neg C$
F	W	W	W	W	F	
F	W	F	W	W	F	
F	F	W	W	W	F	
F	F	F	F	W	F	

ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, DNF2).

Lösung 31 a.ii

wie 28 a.ii (!)

(Die meisten Umformungen sind ja identisch, und nur die kommen hier vor.)

b) Bringen Sie $(A \leftrightarrow B) \to C$ in DNF-Form mittels

i. Synthese aus Wahrheitstafel (DNF1)

Lösung 31 b.i

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \to C$	
W	W	W	W	W	$\to$ $(A \wedge B \wedge C)$
W	W	F	W	F	
W	F	W	F	W	$\to$ $\vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
W	F	F	F	W	$\to$ $\vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
F	W	W	F	W	$\to$ $\vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
F	W	F	F	W	$\to$ $\vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
F	F	W	W	W	$\to$ $\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
F	F	F	W	F	

ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, DNF2):

Lösung 31 b.ii

(hier mal massiv abgekürzt, nicht im Klausur-Stil!)

Ausgangsformel $(A \leftrightarrow B) \to C$. Elimination von Äquivalenz → $((A \to B) \wedge (B \to A)) \to C$ 3× Elimination von Implikation →→→ $\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee C$. 3× Negation näher z. d. AV'n →→→ $((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A)) \vee C$. Negation bes. → $((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee C$. überflüssige Klammern weg → $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee C$

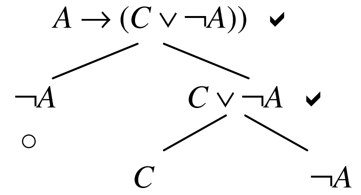
32. Tableaux

a) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $A \to (C \vee \neg A)$, geben Sie eine äquivalente DNF-Formel und alle Modelle (über A und C) an. Wo hätten Sie aufhören können, wenn Sie nur die Erfüllbarkeit hätten prüfen wollen?

b) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $(A \wedge \neg B) \to (B \to (A \vee C))$.

c) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (B \to (A \vee C))$.

Lösung 32a



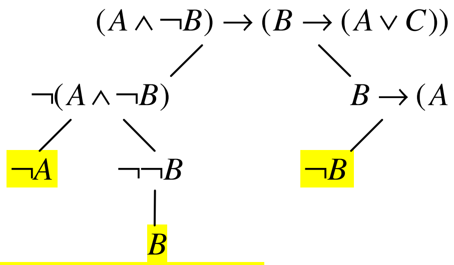
Die Erfüllbarkeit ist klar bei ○ (erstes offenes Blatt).

DNF (nach Rezept): $\neg A \vee C \vee \neg A$ bzw. $\{\{\neg A\},\{C\}\}_{DNF}$.

3 Modelle: (+ alle Oberbelegungen, d.h. mit weiteren Variablen)

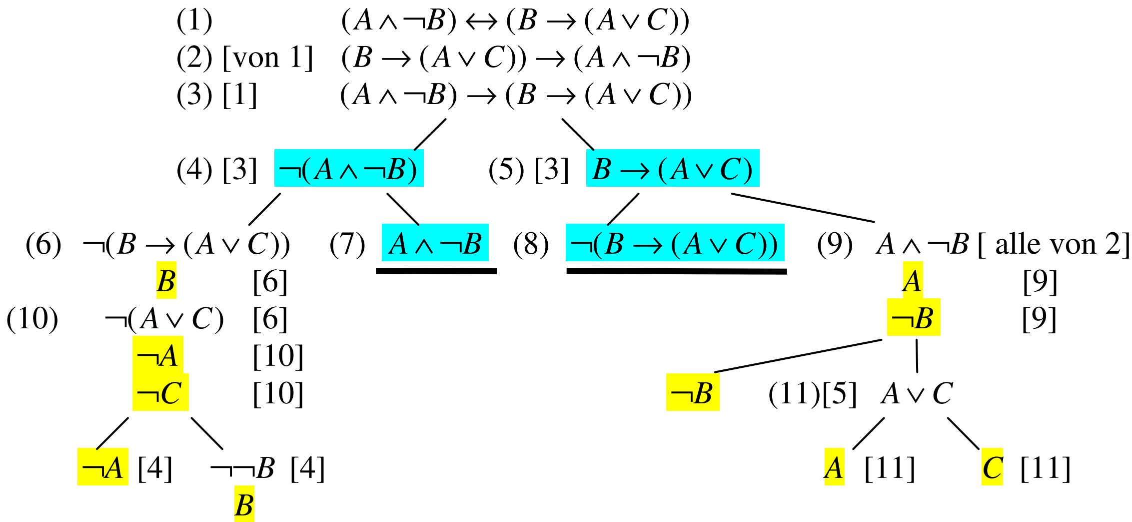
A	C
W	W
F	W
F	F

32b



(also äquivalent zu $\neg A \vee B \vee \neg B \vee A \vee C$, erfüllbar, sogar allgemeingültig)

32c Beispiellösung,
leicht abgekürztes Tableau: Erkennung von Widersprüchen bereits zwischen Formeln



(also – nach Streichung doppelter Literale in Dualklauseln sowie doppelter Dualklauseln – äquivalent zu $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$, somit erfüllbar, widerlegbar und kontingent. $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B)$ reicht sogar. (Warum?)

33. Tableaux

a) Geben Sie eine Formel an, die genau unter den gleichen Belegungen gilt wie alle drei Formeln in $\{A \to B, \neg C \to \neg B, \neg C \vee A\}$ gleichzeitig.

b) Verwenden Sie das Tableauverfahren, um die Erfüllbarkeit der Formelmenge $\{A \to B, \neg C \to \neg B, \neg C \vee A\}$ zu beweisen.

c) „Verallgemeinern" Sie das Tableauverfahren auf endliche Formelmengen anstelle einer Formel so, dass Sie gegenüber (a) eine Ebene im Baum einsparen.

Lösung 33a

$\{A \to B, \neg C \to \neg B, \neg C \vee A\}$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $(A \to B) \wedge (\neg C \to \neg B) \wedge (\neg C \vee A)$ ist erfüllbar.

Lösung 33b

(1) $(A \to B) \wedge (\neg C \to \neg B) \wedge (\neg C \vee A)$

(2) $A \to B$ (von 1)

(3) $\neg C \to \neg B$ (von 1)

(4) $\neg C \vee A$ (von 1)

(5) $\neg A$ (6) B (von 2)

(7) $\neg\neg C$ (8) $\neg B$ (9) $\neg\neg C$ (10) $\neg B$ (von 3)

(11) C (von 7)

etc.

(12) $\underline{\neg C}$ (13) $\underline{A}$ (14) $\neg C$ (15) $\underline{A}$ (von 4)

Lösung 33c

Formeln der Menge direkt als Wurzel, deren einziges Kind, einziger Enkel etc. hinschreiben (s.o.: 2, 3, 4). (1) entfällt dann.

$\boxed{\text{Tipps zu } \mathbf{E9}}$

Wählen Sie anstelle von 12 Aussagevariablen wie z.B.

- Db = David wohnt in Berlin.

wegen der binären Alternative Berlin/Kiel einfach nur 6 Aussagevariablen wie z.B.

- D = David wohnt in Berlin (ergo: $\neg D$ = David wohnt in Kiel).

Damit entfällt auch die explizite Angabe der 6 strikten Alternativen (z.B. „entweder *Db* oder *Dk*") in der Wissensbasis.

34. Prolog, Markierungsalgorithmus

Beweisen Sie mit dem Markierungsalgorithmus die Gültigkeit der Aussage

„Wenn ich Zeit habe, gehe ich einen Kaffee trinken."

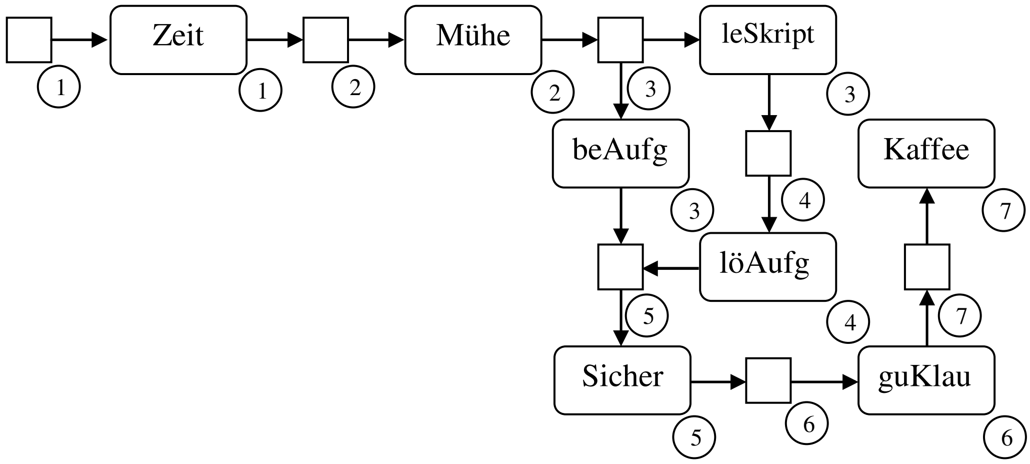
unter der Annahme der folgenden Wissensbasis:

Wenn ich Sicherheit bekomme, schreibe ich eine gute Klausur. Wenn ich mir Mühe gebe, dann bearbeite ich die Aufgaben und lese im Skript. Wenn ich Zeit habe, gebe ich mir Mühe. Wenn ich im Skript lese, kann ich die Aufgaben lösen. Wenn ich eine gute Klausur schreibe, gehe ich einen Kaffee trinken. Wenn ich die Aufgaben bearbeite und sie lösen kann, bekomme ich Sicherheit.

Tipp: Regeln s.o. – Fakt: Ich habe Zeit – Ziel: Ich gehe Kaffee trinken

Lösung 34

Markieren Sie in der gezeigten Reihenfolge.



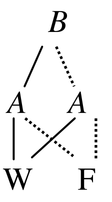
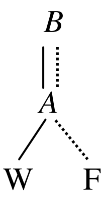
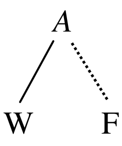
35. Binary Decision Diagram

Bestimmen Sie über (z.B. eine ITE-Form und) eine OBDD-Darstellung und anschließende Reduktion einen ROBDD für $(B \to A) \wedge (A \vee B)$.

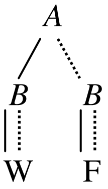
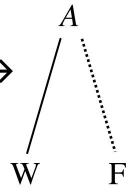
Lesen Sie aus dem ROBDD eine zu der ursprünglichen Formel äquivalente aber kürzere Formel heraus.

Lösung 35

<u>Eine</u> ITE-Umwandlung ergibt $B \to (A \to \top / \bot)/(A \to \top / \bot)$, vgl. Übung 25.

OBDD:  → Verschm. →  → Überspr. →  = ROBDD v. $\boxed{A}$.

Eine andere ITE-Umwandlung ergibt z.B. $A \to (B \to \top / \top)/(B \to \bot / \bot)$.

OBDD:  → 2× Überspringen →  = s.o.

36. AL-Kalküle
Ergänzen Sie im folgenden Beweis (im Mendelson-Kalkül) von $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$ die „Begründungen“, d.h.

- „Gegeben “ oder
- „Axiom“ oder
- Regel (MP) oder Substitution + Formel-Nummern ihrer Prämissen.

1.	$A \to B$	....
2.	$B \to C$	....
3.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	....
4.	$A \to (B \to A)$	....
5.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(4), ...
6.	$A \to (B \to C)$	....
7.	$(A \to B) \to (A \to C)$	....
8.	$A \to C$	....

Lösung 36

1.	$A \to B$	Gegeben
2.	$B \to C$	Gegeben
3.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Axiom
4.	$A \to (B \to A)$	Axiom
5.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(4), $[A,B/ B \to C ,A]$
6.	$A \to (B \to C)$	(2,5) MP
7.	$(A \to B) \to (A \to C)$	(3,6) MP
8.	$A \to C$	(1,7) MP

37. Werkzeugkasten redundant
Zeigen Sie, dass die Regelmenge des Werkzeugkastens nicht minimal ist:

a) Beweisen Sie mit dem Werkzeugkasten $A \to A$, ohne Prämissen oder die Wiederholungsregel zu verwenden.

Lösung 37a

Zeige $A \to A$

1.	| A	Ann
2.	| $\neg\neg A$	DNE, 1
3.	| A	DNB, 2
4.	$A \to A$	BB

b) Wie erhält man daraus $\varphi \vDash \varphi$, also die Wiederholungsregel?

Lösung 37b

$A \to A$ ist (wie in (a) mit Werkzeugkasten bewiesen) eine Tautologie. Für jede Formel φ ist also (wegen Substitutionssatz) $\varphi \to \varphi$ eine Tautologie, bzw. gilt (wegen Äquivalenzsatz) $\varphi \vDash \varphi$.

38. Werkzeugkasten
Leiten Sie Nr. (a) und (i) der folgenden „Kleene-Axiome“ als Tautologien her.

a) $A \to (B \to A)$

Lösung 38a

	Zeige $(A \to (B \to A))$	
1.	$\mid \quad A$	Ann
	$\mid \quad$ Zeige $B \to A$	
2.	$\mid \quad \mid \quad B$	Ann
3.	$\mid \quad \mid \quad A$	Wdh, 1
4.	$\mid \quad B \to A$	BB
5.	$(A \to (B \to A))$	BB

i) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

Lösung 38b

	Zeige $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	
1.	$\mid \quad A \to B$	Ann
	$\mid \quad$ Zeige $(A \to \neg B) \to \neg A$	
2.	$\mid \quad \mid \quad A \to \neg B$	Ann
	$\mid \quad \mid \quad$ Zeige $\neg A$	
3.	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad A$	Ann
4.	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \neg B$	MP,2,3
5.	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad B$	MP,1,3
6.	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \perp$	WE,4,5
7.	$\mid \quad \mid \quad \neg A$	IB2
8.	$\mid \quad ((A \to \neg B) \to \neg A)$	BB
9.	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	BB

Tipps zu **E10** siehe 38.

39. Werkzeugkasten
Leiten Sie Nr. (c) der folgenden Folgerungen … ab.

c) $\{ \neg A \vee B, \neg B, A \vee C \} \vDash C$

Lösung 39

1.	$\neg A \vee B$	Geg.
2.	$\neg B$	Geg.
3.	$A \vee C$	Geg.
	Zeige C	
4.	$\mid \quad \neg A$	OB1,1,2
5.	$\mid \quad C$	OB1,3,4
6.	C	DB

Kurzversion:

1.	$\neg A \vee B$	Geg.
2.	$\neg B$	Geg.
3.	$A \vee C$	Geg.
	Zeige C	
4.	$\mid \quad \neg A$	OB1,1,2
5.	C	OB1,3,4 DB

Tipps zu **E11** siehe 39.

kein Tipp zu **E12**

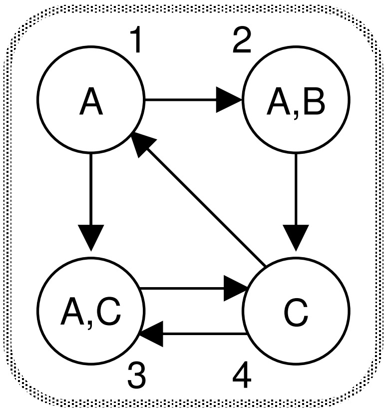
Tipps zu **E13**

- Verwenden Sie den Top-Bottom-Dialekt der AL.
- Was bedeutet $\Box\bot$ (bzw. $\Diamond\bot$, $\Box\top$, $\Diamond\top$)?

40. Gültigkeit von ML-Formeln in Kripke-Strukturen

Im Kripke-Rahmen und der Belegung wie rechts, mit welchen Welten als Anfangssituation gilt die Formel

$\Diamond\Box A \wedge \Box\Diamond(A \wedge\neg C)$?



Lösung 40
Um nicht bei der Auswertung der Modaloperatoren $\Diamond$ und $\Box$ immer wieder auf den Graphen sehen zu müssen, tragen wir zu den Knotennummern des Graphen in Klammern die Nummern der unmittelbaren Nachfolgeknoten ein:

	1 (2,3)	2 (4)	3 (4)	4 (1,3)
A	1	1	1	0
C	0	0	1	1
$\neg C$	1	1	0	0
$A \wedge\neg C$	1	1	0	0
$\Box A$	1	0	0	1
$\Diamond\Box A$	0	1	1	1
$\Diamond (A \wedge\neg C)$	1	0	0	1
$\Box\Diamond (A \wedge\neg C)$	0	1	1	0
$\Diamond\Box A \wedge \Box\Diamond (A \wedge\neg C)$	0	1	1	0

: erfordert Suche in den Folgeknoten, z.B. …
Wert von $\Box A$ in Spalte k: Gilt in allen Nachfolgerwelten von k die Aussage A?

41. ML-Rahmeneigenschaften und Axiome

a) Welche Rahmen werden durch das ML-Axiom $\Diamond A \to \Box A$ gekennzeichnet?

Lösung 41a
unverzweigt/rechtseindeutig, d.h. $\forall u,v,w \in K : ((wRu \wedge wRv) \to u = v)$
Annahme: $\Diamond A \to \Box A$ gilt. Hätte ein Knoten mehrere Nachfolger, könnte man genau einen mit A belegen, und dann wäre $\Diamond A$ richtig und $\Box A$ falsch. Also rechtseindeutig.
Annahme rechtseindeutig. Dann natürlich $\Diamond A \to \Box A$ („Kennste einen, kennste alle.“)

b) Wir nennen einen ML-Rahmen $Rah=(K,R)$ **euklidisch**, wenn $\forall u,v,w\in K:((wRu \wedge wRv) \rightarrow uRv)$. Geben sie eine ML-Formel φ an, für die gilt: Genau dann ist ein ML-Rahmen euklidisch, wenn φ Axiom ist, d.h. wenn für jeden Anfangsknoten *Anf* und jede *K*-Belegung *Bel* jede Substitution von φ in (*Rah*,*Bel*,*Anf*) gilt.

Lösung 41b
$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
Annahme $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ gilt. Hätte ein Knoten *k* Nachfolger, die nicht alle in Relation *R* stehen, dann gäbe es zwei davon, *l* und *m*, mit $\neg lRm$. Wir könnten *m* mit A belegen und alle Nachfolger von *l* nicht. Dann wäre in *k* $\Diamond A$ richtig (da $m \models A$) und $\Box\Diamond A$ falsch (da nicht $l \models \Diamond A$).
Annahme euklidisch. Gilt $\Diamond A$, so erfüllt ein Nachfolger *l* des aktuellen Knotens *k* A und ist Nachfolger aller Nachfolger von *k*, so dass in *k* gilt: $\Box\Diamond A$.

c) Welche Rahmen werden durch das ML-Axiom $\neg(\Diamond A \wedge \Diamond\neg A)$ gekennzeichnet?
Tipp (c): Zusammenhänge zwischen $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ verwenden.

Lösung 41c
$\neg(\Diamond A \wedge \Diamond\neg A)$ ist äquivalent zu $\Diamond A \rightarrow \Box A$, denn

$$\boxed{\neg}(\Diamond A \boxed{\wedge} \Diamond\neg A) \equiv \boxed{\neg}\Diamond A \boxed{\vee\neg}\Diamond\neg A$$

$$\neg\Diamond A \vee \boxed{\neg\Diamond\neg} A \equiv \neg\Diamond A \vee \boxed{\Box} A$$

$$\boxed{\neg}\Diamond A \boxed{\vee} \Box A \equiv \Diamond A \boxed{\rightarrow} \Box A$$

– also siehe (a)!

42. Zusammenhänge zwischen Temporaloperatoren

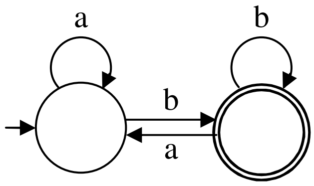
Drücken Sie die zusätzlichen Temporaloperatoren R,W, Op1, Op2, Op3 möglichst einfach (mittels AL-Junktoren) durch die Standardoperatoren aus – und umgekehrt die Standardoperatoren (außer X) durch die zusätzlichen.

Lösung 42

•	$\varphi\mathbf{W}\psi$	$= (\varphi\mathbf{U}\psi) \vee \mathbf{G}\varphi$	klar
•	$\varphi\mathbf{R}\psi$	$= (\psi\mathbf{U}(\varphi\wedge\psi)) \vee \mathbf{G}\psi$	klar
		$= \neg(\neg\varphi\mathbf{U}\neg\psi)$	(Begründung etwas langwierig, gut für lange Winterabende)
•	$\mathbf{Op_1}\varphi$	$= \mathbf{GF}\varphi$	endl. viele $\Rightarrow$ nach dem letzten Knoten mit φ wird $\mathbf{F}\varphi$ falsch
•	$\mathbf{Op_2}\varphi$	$= \mathbf{GF}\neg\varphi = \neg\mathbf{FG}\varphi$	dito mit $\neg\varphi$; Dualismus
•	$\mathbf{Op_3}\varphi$	$= \mathbf{G}\neg\varphi = \neg\mathbf{F}\varphi$	nie = für immer nicht; Dualismus
•	$\mathbf{G}\varphi$	$= \bot\mathbf{R}\varphi$	$\bot$ kann nie kommen, also darf φ nie „abgelöst“ (unwahr) werden
•	$\mathbf{F}\varphi$	$= \neg(\bot\mathbf{R}\neg\varphi)$	da $\mathbf{F}\varphi = \neg\mathbf{G}\neg\varphi$
•	$\varphi\mathbf{U}\psi$	$= \mathbf{F}\psi \wedge (\varphi\mathbf{W}\psi)$	klar
		$= \neg(\neg\varphi\mathbf{R}\neg\psi)$	(folgt leicht aus dem Winterabendergebnis)

43. PLTL-Formeln, Büchi-Automaten und ω-reguläre Ausdrücke

a) Bestimmen Sie zu folgendem Büchi-Automaten

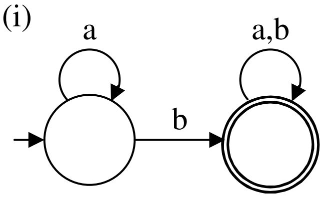


(i) eine PLTL-Formel (Situationen einelementig)
(ii) einen ω-regulären Ausdruck
„mit denselben Sprachen" – beide jeweils möglichst kurz.

Lösung 43a:
informell: immer wieder mal b
(denn nur mit b kommt man immer wieder in den Zielzustand)
(i) **GF**b (und stets aXORb, d.h. z.B. **G**(a↔¬b))
(ii) $(a^*b)^\omega$

b) Bestimmen Sie zu dem ω-regulären Ausdruck $a^*b(a|b)^\omega$
(i) einen Büchi-Automaten
(ii) eine PLTL-Formel (Situationen einelementig)
„mit denselben Sprachen" – beide jeweils möglichst kurz/einfach.

Lösung 43b:
informell: mindestens einmal b
(denn nur mit b kommt man erstmals in den Zielzustand, wo man dann bleibt)
(i)

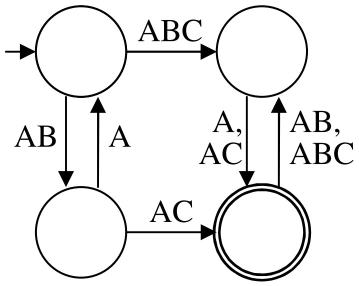


(ii) **F**b (und stets aXORb)

c) Bestimmen Sie zu der PLTL-Formel $B \wedge \mathbf{G}[A \wedge (B \rightarrow \mathbf{X}\neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \mathbf{X}B)] \wedge \mathbf{F}C$
über den AL-Variablen A, B, C
(i) einen Büchi-Automaten
(ii) einen ω-regulären Ausdruck
„mit denselben Sprachen" – beide jeweils möglichst kurz/einfach.

Lösung 43c:

(i)



informell:

- A immer.
- B und nicht B wechseln ab.
- Irgendwann soll man (mit C) in einen der rechten Zustände; ab dann ist C oder nicht C egal.
- Alternativ oder zusätzlich könnte rechts oben Zielzustand sein.

(ii) [Wir schreiben kurz AB∘ABC für {A,B}{A,B,C} (und ähnlich)]
$(AB \circ A)^* \circ [ABC \mid AB \circ AC \circ (AB|ABC)] \circ [(A|AC) \circ (AB|ABC)]^{\omega}$

44. PL1 in natürlicher Sprache

„Formalisieren" sie die folgenden Aussagen:

a) Nico und Björn sind Studenten.
b) Nico und Björn sind Freunde.
c) Nico ist kleiner als Björn und größer als Erika.
d) Erika sitzt zwischen Nico und Björn.
e) Jeder mag seine (eventuellen) Tischnachbarn.
f) Jeder mag seinen Tischnachbarn. [Achtung!]
g) Jeder kennt jemanden, der ihn mag.
h) Jeder kennt jemanden, der jemanden mag.
i) Jeder der nur will kann es schaffen.
j) Ein ganz Schlauer hat alle gestern gekauften Kekse aufgegessen.

Lösungen 44 (wie immer: Beispiele!)

a) $St(ni) \wedge St(bj)$
b) $Fr(ni,bj)$
c) $Kl(ni,bj) \wedge Gr(ni,er)$
d) $Sz(er,ni,bj)$
e) $\forall x \forall y(Tn(y,x) \rightarrow Mag(x, y))$
f) Annahme: leere/voll besetzte Zweiertische → $\forall x\, Mag(x, tn(x))$. Sonst evtl. wie (e).
g) $\forall x \exists y\, (Kn(x, y) \wedge Mag\, (y, x))$
h) $\forall x \exists y\, (Kn(x, y) \wedge \exists z\, Mag(y, z))$
i) $\forall x\, (Wes(x) \rightarrow Kes(x))$
j) $\exists x\, \big(Gschl(x) \wedge \forall y[(Kks(y) \wedge Ggk(y)) \rightarrow Hgg(x,y)]\big)$

45. Freie und gebundene Variablen + Lösung

- Unterstreichen Sie sämtliche freien Variablenvorkommen.
- Zeichen Sie von jedem gebundenen Variablenvorkommen aus einen Pfeil zu der Quantifizierung, die es bindet.

$\forall x \exists y (R(x, y) \to (P(x) \vee Q(y, x)))$	$\forall x (P(x) \to \forall y Q(x, y))$
$\forall x\, \exists y (R(x, y)) \to (P(\underline{x}) \vee Q(\underline{y}, \underline{x}))$	$\forall x\, P(x) \to \forall y Q(\underline{x}, y)$
$\forall x (P(x) \to Q(x, \underline{y}))$	$\forall x (P(x) \to \forall x\, Q(x, \underline{y}))$

46. Auswertung von „konstanten PL1-Termen und -Formeln“

Werten Sie in der Struktur A_{Bsp} aus:

a) die Terme $c, f(c)$ und $f(f(f(c)))$;

b) die Formeln $P(f(c), f(c))$, $P(c, f(c))$ und $P(f(c), c) \to P(c, c)$.

Lösung 46 (Pfad := Pfeil oder Identität)

a) l, m, n;

b) Pfad m→ m? – W, Pfad l→ m? – F, $(\perp \to \top)$? – W.

47. Auswertung von PL1-Termen und –Formeln mit Variablen

Werten Sie in der Interpretation (A_{Bsp}, I_V) mit $I_V(x) = I_V(y) = l$ aus:

a) $P(x, y)$;

b) $\exists y P(x, y)$ c) $\forall x \exists y P(x, y)$;

d) $\forall x P(x, y)$ e) $\exists y \forall x P(x, y)$;

Lösung 47 (Pfad := Pfeil oder Identität)

a) $P(x, y)$: Pfad von l nach l, daher: W

b) $\exists y P(x, y)$: Da für $I_V(x) = l$ $\exists y P(x, y)$ wahr mit $I_V(y) = l$: W

c) $\forall x \exists y P(x, y)$: $\exists y P(x, y)$ stimmt wegen $P(x,x)$ nicht nur für $I_V(x) = l$, sondern auch $I_V(x) =$ k, m, n, also: W

d) $\forall x P(x, y)$: Kein Pfad von m oder n nach l, also F

e) $\exists y \forall x P(x, y)$: Aber mit $I_V(y) =$ n ex. für $I_V(x) =$ k, l, m, n ein Kantenzug von $I_V(x)$ nach $I_V(y)$, also W

Wir können auch wegen des endlichen Universums eine Tabelle der Paare *ab* erstellen, für die $P(x, y)$ gilt und die Ergebnisse durch endliche und/oder-Ketten darstellen und **systematisch** und vollständig abprüfen.

48. Auswertung von geschlossenen Formeln in einer Struktur, Lösung
Werten Sie folgende geschlossene Formeln (z.B. „durch bloßes Hinsehen") in der Struktur A_{Bsp} aus:

a) $\exists x \neg P(x, f(x))$ W (x:=l)

b) $\forall y((\forall x P(x, y)) \to y = f(y))$ (in PL1$_=$), W (y= k,l,m → Prämisse F, y=n → Konklusion W)

c) $\forall x\ P(x, f(x))$ F (x:=l)

d) $\exists x \forall y P(x, y)$ W (x:=k)

zu d: Wie lautet ein Term in der Struktur A_{Bsp} für solch ein x?
Für k gibt es <u>keinen</u> konst. Term in A_{Bsp}!

49. Anwendung erster PL-Theoreme in natürlicher Sprache

a) Sometimes it don't always work. (Casey Stengel, Baseballmanager, 1890-1975)
b) Immer putzt Du Dir nie die Füße ab! (zahlreiche Mütter, seit Erfindung der Fußmatte)

(i) Formalisieren Sie jeweils die Aussage als PL1_Formel über einem Universum der entsprechenden „Gelegenheiten", evtl. auch Personen und Körperteilen.
(ii) Was ist dabei eine geeignete potentielle Eigenschaft der Objekte?
(iii) Wie lässt sich die Formel bzw. die Aussage äquivalent abkürzen?
(iv) Woraus ergibt sich die Äquivalenz?

Lösung 49

a) (i) $\exists x \neg \forall y ItWorks(y)$ bzw. $\exists x \neg \forall y Works(it, y)$ bzw. mit y anstelle von x
(ii) Es funktioniert bei Gelegenheit x: $ItWorks(x)$, bzw.
$Works \subseteq Geschehnisse \times Gelegenheiten$, z funktioniert bei x: $Works(z, x)$.
(iii) $\neg \forall x ItWorks(x)$ bzw. $\neg \forall x Works(it, x)$
(iv) Quantorbeseitigung (Quantorvariable kommt nicht im Scope vor) & gebundene Umbenennung

b) (i) $\forall x \neg \exists y\ DpDdFa(y)$ bzw. $\forall x \neg \exists y\ Putzt\_ab(Du, Deine\_Füße, y)$
(bzw. komplizierter mit $Ist\_Fuß(u) \land Gehört(u, Du)$)
(ii) Du putzt Dir die Füße ab bei Gelegenheit x: $DpDdFa(x)$, bzw.
$Putzt\_ab \subseteq Personen \times Dinge \times Gelegenheiten$
(iii) $\neg \exists x\ DpDdFa(x)$ bzw. $\neg \exists x\ Putzt\_ab(Du, Deine\_Füße, x)$
(iv) Quantorbeseitigung (Quantorvariable kommt nicht im Scope vor) & gebundene Umbenennung

Anmerkung: Das Universum umfasst ggf. „Objekte" wie Gelegenheiten, Geschehnisse, Personen, … Aber die Relationen treffen dann höchstens auf bestimmte Objektarten zu. So brauchen wir noch kein PL1 mit Typen.

50. Substituierbarkeit von Termen für Variablen in Formeln

(i) Wo gilt free (τ, x, φ) ? –:

Lösung 50.i

	τ	φ	ja	nein
a)	y	$\forall y P(f(x))$		X
b)	$f(x, y)$	$R(x, y) \to \forall y P(y)$	X	
c)	$f(x, y)$	$\forall y R(y, c) \vee \exists y R(x, y)$		X
d)	$f(x, y)$	$\forall x R(x, y)$	X	

Prüfalgorithmusabläufe:

a) (1) x ist frei in φ (2) und zwar im Scope von ∀y (ii) y kommt in τ vor → not free (τ, x, φ)

b) (1) x kommt frei in φ vor (2) aber nicht im Scope einer Quantisierung (i) → free (τ, x, φ)

c) (1) x ist frei in φ (2) und zwar im Scope von ∃y (ii) y kommt in τ vor → not free (τ, x, φ)

d) (1) x kommt nicht frei in φ vor → free (τ, x, φ)

(ii) Schreiben Sie einen Term τ und eine Formel φ, bei denen oben „ja" gelten würde, und zwar genau wegen des Falles (3) im Prüfalgorithmus für „frei für" auf Folie 309.

Lösung 50.ii

- Wegen „nicht Fall (1)" muss φ freie $[x]$ (Vorkommen von x) enthalten.
  Der Einfachheit halber versuchen wir es mit *einem* freien $[x]$.
- Wegen „nicht Fall (2.i)" muss es in φ mindestens eine Quantisierung $\forall y$ bzw. $\exists y$ geben, in deren Scope ein freies $[x]$ liegt.
  Der Einfachheit halber versuchen wir es mit *einem* $\forall y$.
- Wegen „nicht Fall (2.ii)" darf y in τ nicht vorkommen.
  Der Einfachheit halber versuchen wir es mit $P(x)$ als τ.

Also zum Beispiel: τ: x und φ: $\forall y P(x)$

51. PL1- Tableaux

Beweisen Sie mit PL1- Tableaux:

a) $[\forall x(P(x) \to Q(x)] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$

b) $\forall y[(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge P(y)) \to Q(y)]$

Tipps: Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit des Gegenteils.
Vervollständigen Sie zu (a) das unten gezeigte Tableau, indem Sie die Nummern der Prämissen und ggf. die verwendeten Regeln eintragen.

Lösung 51a

(1)	$\neg\{[\forall x(P(x) \to Q(x))] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]\}$	
(2)	$[\forall x(P(x) \to Q(x))]$	[1]
(3)	$\neg[(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$	[1]
(4)	$\forall x(P(x))$	[3]
(5)	$\neg(\forall x Q(x))$	[3]
(6)	$\neg Q(a)$	[5, TR W-]
(7)	$P(a)$	[4, TR Sp+]
(8)	$P(a) \to Q(a)$	[2, TR Sp+]

(9) $\underline{\neg P(a)}$ [8] (10) $\underline{Q(a)}$ [8]

Alle Zweige sind geschlossen: die Literalwidersprüche sind oben **markiert**. Die Negation von (a) ist demnach unerfüllbar, somit ist (a) allgemeingültig.

Könnte man oben (6) und (7) vertauschen? – **NEIN**, denn das *a* in $\neg Q(a)$ darf vorher noch nicht vorgekommen sein, würde dann aber in $P(a)$ darüber stehen.

Lösung 51b

(1)	$\neg\forall y[(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge P(y)) \to Q(y)]$	
(2)	$\neg[(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge P(c)) \to Q(c)]$	[1, W-]
(3)	$(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge P(c))$	[2]
(4)	$\neg Q(c)$	[2]
(5)	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	[3]
(6)	$P(c)$	[3]
(7)	$P(c) \to Q(c)$	[5, Sp+]
(8) (9)	$\underline{\neg P(c)}$ $\underline{Q(c)}$	je: [6]

Alle Zweige sind geschlossen, etc. vgl. oben.

52. PL1-Werkzeugkasten

Beweisen Sie mit dem PL1-Werkzeugkasten:

a) $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)), P(m)\} \models R(m)$

b) $[\forall x(P(x) \to Q(x)] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$

Lösung 52a

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Geg.
2.	$\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x))$	Geg.
3.	$P(m)$	Geg.
	Zeige $R(m)$	
4.	$\mid\quad P(m) \to Q(m)$	Sp,1,[x/m]
5.	$\mid\quad Q(m)$	MP,4,3
6.	$\mid\quad P(m) \wedge Q(m)$	UE,3,5
7.	$\mid\quad (P(m) \wedge Q(m)) \to R(m)$	Sp,2,[x/m]
8.	$\mid\quad R(m)$	MP,7,6
9.	$R(m)$	DB

Lösung 52b

	Zeige $\forall x[P(x) \to Q(x)] \to [\forall x P(x) \to \forall x Q(x)]$	
1.	$\mid\quad \forall x[P(x) \to Q(x)]$	Ann.
	$\mid\quad$ Zeige $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$	
2.	$\mid\quad\mid\quad \forall x P(x)$	Ann.
	$\mid\quad\mid\quad$ Zeige $\forall x Q(x)$	
	$\mid\quad\mid\quad\mid\quad$ Zeige $Q(c)$	
3.	$\mid\quad\mid\quad\mid\quad\mid\quad P(c)$	Sp,2,[x/c]
4.	$\mid\quad\mid\quad\mid\quad\mid\quad P(c) \to Q(c)$	Sp,1,[x/c]
5.	$\mid\quad\mid\quad\mid\quad\mid\quad Q(c)$	MP,4,3
6.	$\mid\quad\mid\quad\mid\quad Q(c)$	DB
7.	$\mid\quad\mid\quad \forall x Q(x)$	AB
8.	$\mid\quad (\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))$	BB
9.	$[\forall x(P(x) \to Q(x)] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$	BB

53. Pränexe Normal-Form

a) Anna bringt $\exists xP(x) \to \neg\exists y\neg Q(y)$ in drei Schritten in äquivalente BPNF:

→ $\exists xP(x) \to \forall y\neg\neg Q(y)$

→ $\exists xP(x) \to \forall yQ(y)$

→ $\exists x\forall y(P(x) \to Q(y))$

Bea stellt mit Universum $\{0,1\}$, $P(x) :\Leftrightarrow x = 0$, $Q(y) :\Leftrightarrow y = 1$ fest, dass die erste und die letzte Formel nicht äquivalent sind.

Prüfen Sie, ob Anna oder Bea Recht hat (oder beide oder keine?)

Bringen Sie in BPNF:

b) $\forall x\{P(x) \to [\forall yR(x,y) \to \neg\forall zS(y,z)]\}$

c) $R(x,y) \to [\exists y\{P(y) \to ([\exists xP(x)] \to Q(y))\}]$ **E16**

Lösung 53a

Anna darf die Quantoren nicht vor die Implikation ziehen; ihr letzter Schritt ist *falsch*. Das Vorziehen ist nur für $\wedge$ und $\vee$ erlaubt. Insofern könnte ihr Ergebnis höchstens zufällig stimmen. Tut es aber *nicht*, denn ...

Bea hat Recht. Mit Beas Interpretation wird …

(i) $\exists xP(x) \to \neg\exists y\neg Q(y)$ falsch, denn $\exists xP(x)$ trifft zu, nämlich auf x=0, aber $\neg\exists y\neg Q(y)$ trifft nicht zu, denn es gilt $\exists y\neg Q(y)$, z.B. wegen $\neg Q(0)$,

(ii) $\exists x\forall y(P(x) \to Q(y))$ wahr, denn für x=1 ist $P(x)$ falsch, also $P(x) \to Q(y)$ immer wahr, egal was Q oder y bedeutet.

Lösung 53b

Bereinigen: $\forall x\{P(x) \to [\forall uR(x,u) \to \neg\forall zS(y,z)]\}$

$\equiv \forall x\{\neg P(x) \vee [\neg\forall uR(x,u) \vee \neg\forall zS(y,z)]\}$ „→“ ersetzen:

$\equiv \forall x\{\neg P(x) \vee [\exists u\neg R(x,u) \vee \exists z\neg S(y,z)]\}$ $\neg\forall$ auflösen

$\equiv \forall x\exists u\exists z\{\neg P(x) \vee [\neg R(x,u) \vee \neg S(y,z)]\}$ Quantoren nach vorne

Kein Tipp zu **E16**

54. Skolem-Form

„Skolemisieren“ Sie

a) $\exists xP(x)$

b) $\forall x\exists yR(x,y)$

c) $\forall x\exists y\forall z\exists wS(x,y,z,w)$

d) $\forall x\exists y[\exists uP(x,g(y,f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(u,y)]$

Lösung 54

a) $P(a)$

b) $\forall xR(x,f(x))$

c) $\forall x\forall zS(x,f(x),z,g(x,z))$

d) Achtung: zunächst Überführung in BPNF!

→ z.B. $\forall x\exists y\exists v[P(x,g(y,f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(u,y)]$

→ $\forall x\exists v[P(x,g(h(x),f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(u,h(x))]$

→ $\forall x[P(x,g(h(x),f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(u,h(x))]$

55. Klauselnormalform

Bestimmen Sie jeweils eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform:

a) $P(x) \to [\forall y \exists z (S(x,z) \vee R(x,y,z))]$

b) $\exists x \{R(x,y) \to \neg \exists x Q(y,x)\}$

Lösung 55a

„Schließung“ mit Ex.-Quantoren → $\exists x (P(x) \to \forall y \exists z (S(x,z) \vee R(x,y,z)))$

Bereinigung: unnötig

Ersetzen von $\to$ → $\exists x (\neg P(x) \vee \forall y \exists z (S(x,z) \vee R(x,y,z)))$

PNF: → $\exists x\ \forall y \exists z\ (\neg P(x) \vee (S(x,z) \vee R(x,y,z)))$

Skolemisierung → $\forall y \exists z (\neg P(a) \vee (S(a,z) \vee R(a,y,z)))$

→ $\neg P(a) \vee (S(a,f(y)) \vee R(a,y,f(y)))$

→ $\{\{\neg P(a), S(a,f(y)), R(a,y,f(y))\}\}_{KlNF}$

Lösung 55b

„Schließung“ mit Ex.-Quantoren → $\exists y \exists x \{R(x,y) \to \neg \exists x Q(y,x)\}$

Bereinigung: → $\exists y \exists x \{R(x,y) \to \neg \exists z Q(y,z)\}$

Ersetzen von $\to$ → $\exists y \exists x \{\neg R(x,y) \vee \neg \exists z Q(y,z)\}$

PNF: → $\exists y \exists x \{\ \neg R(x,y)\ \vee\ \forall z \neg Q(y,z)\ \}$

→ $\exists y \exists x \forall z \{\ \neg R(x,y)\ \vee\ \neg Q(y,z)\ \}$

Skolemisierung → $\exists x \forall z (\neg R(x,a) \vee \neg Q(a,z))$

→ $\forall z (\neg R(b,a) \vee \neg Q(a,z))$

→ $\neg R(b,a) \vee \neg Q(a,z)$

KlNF → $\{\{\neg R(b,a), \neg Q(a,z)\}\}_{KlNF}$

56. Herbrand-Expansion

Sei $\varphi = \forall x \forall y [P(x, f(x, g(y))) \wedge P(h(g(y)), f(h(x), y))]$

a) Zählen Sie 10 möglichst kurze Terme des Herbrand-Universums von φ auf.

b) Zählen Sie 3 möglichst kurze Formeln der Herbrand-Expansion von φ auf.

Lösung 56a

1 Zeichen: c

4 Zeichen: g(c), h(c)

6 Zeichen: f(c,c)

7 Zeichen: g(g(c)), g(h(c)), h(g(c)), h(h(c))

9 Zeichen: f(c,g(c)), f(c,h(c)), ... andere: f(g(c),c), f(h(c),c)), g(f(c,c)) , h(f(c,c))

Lösung 56b

x/c, y/c:	P(c,f(c,g(c)))∧P(h(g(c)),f(h(c),c))
x/c, y/g(c):	P(c,f(c,g(g(c))))∧P(h(g(g(c))),f(h(c),g(c)))
x/g(c), y/c:	P(g(c),f(g(c),g(c)))∧P(h(g(c)),f(h(g(c)),c))

57. Unifikation – Lösungen

p(x, g(a), y)	und p(a, g(x), b)	x→a, y→b
p(a, x)	und p(x, g(x))	–
p(x)	und p(g(x))	–
p(h(x))	und p(g(x))	–
q(x, y)	und q(y, x)	x→y ODER y→x
q(a, y)	und q(y, x)	x→a, y→a
q(g(x, y), f(x))	und q(g(h(z), y), f(h(z)))	x→h(z)
q(g(x, y), f(x))	und q(g(h(a), y), f(h(z)))	x→h(a), z→a

58. Resolution

Formalisieren Sie und zeigen Sie die Unerfüllbarkeit von:
Der Barbier in unserem Ort rasiert genau alle Männer des Ortes, die sich nicht selbst rasieren.
Tip: Universum=Männer im Ort, b = der Barbier, R = rasiert.
2. Die beiden (nach geeigneter Unifikation) einander widersprechenden Literale für den Resolutionsschritt müssen nicht die offensichtlichsten sein.

Lösung 58

Formalisierung der Aussage: $\forall x(\neg R(x,x) \leftrightarrow R(b,x))$

$\forall x[(R(x,x) \vee R(b,x)) \wedge (\neg R(x,x) \vee \neg R(b,x))]$ bzw

$\{\ (R(x,x), R(b,x)\ \}, \{\ \neg R(x,x), \neg R(b,x)\ \}\ \}_{KINF}$

Wichtige Idee: Nicht $R(x,x)$ mit $\neg R(x,x)$ verrechnen (bzw. analog $R(b,x)$), sondern $R(x,x)$ mit $\neg R(b,x)$ verrechnen und dazu $x \rightarrow b$ unifizieren! → Resolution zu $\varnothing$.

$$\{\ \{R(x,x), R(b,x)\ \}, \{\ \neg R(x,x), \neg R(b,x)\ \}\ \}$$

$$R(b,b) \qquad \boxed{x/b} \qquad \neg R(b,b)$$

$$\varnothing$$

59. Resolution
Formalisieren Sie und zeigen Sie mittels Resolution, dass (im Eisenbahnnetz) aus

- Bahnhof Darmstadt ist mit dem Bahnhof Erzhausen verbunden.
- Ist ein Bahnhof *x* mit einem Bahnhof *y* verbunden und dieser zum Bahnhof *z* benachbart, so ist Bahnhof *x* auch mit Bahnhof *z* verbunden.
- Bahnhof Erzhausen ist zum Bahnhof Egelsbach benachbart.

folgt:

- Bahnhof Darmstadt ist mit dem Bahnhof Egelsbach verbunden.

Lösung 59
Wir zeigen dass folgende Formel widersprüchlich (unerfüllbar) ist. Dann folgt $V(da, egb)$ aus den ersten drei Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
&V(da, erz) \wedge \\
&\forall x \forall y \forall z ((V(x,y) \wedge B(y,z)) \rightarrow V(x,z)) \wedge \\
&B(erz, egb) \wedge \\
&\neg V(da, egb)
\end{aligned}
$$

… ist abgeschlossen und bereinigt, →-Ersetzung ergibt $\neg V(x,y) \vee \neg B(y,z) \vee V(x,z)$, pränex mit $\forall x \forall y \forall z$ vorn, ist skolemisiert und in KNF, also Klauselnormal(Mengen)form, einschließlich darunter angehängter Resolution (unifiziert nach Konstanten):

$\{ \{ V(da, erz) \}, \{ \neg V(x,y), \neg B(y,z), V(x,z) \} \}, \{ B(erz, egb) \}, \{ \neg V(da, egb) \} \}_{\text{Kl-NF}}$

$\neg B(erz, z), V(da, z))$

$V(da, egb)$

$\varnothing$, also unerfüllbar