Wiederholung Mengenlehre

1. Teilmengen, Mengenoperationen, Abbildungen
Seien Teilmengen der natürlichen Zahlen wie folgt definiert:

$A := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C := \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$D := \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $E := \{8n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
i. $A \subseteq C$ ii. $E \subseteq C$ iii. $B \subseteq D$ iv. $E \subseteq D$
v. $D = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ (auch: „$A{\cdot}B$“ geschrieben) vi. $E = A \cap C$
vii. $E \times D \subseteq A \times B$ viii. $A \cup B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Lösung 1a
i: F, ii: W, iii: F, iv: F, v: W, vi: F, vii: W, viii: F

(Warum ist <u>nicht</u> $A{\cdot}B = \{6n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, wo doch $2n \cdot 3n = 6n^2$?
Sie sollten ohnehin alle Entscheidungen übungshalber begründen!)

b) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
i. $A \cap B$ ii. $C \cap E$ iii. $B \cup D$ iv. $B \setminus D$ v. $C \times D$

Lösung 1b
i. $A \cap B = D$ ii. $C \cap E = E$ iii. $B \cup D = B$
iv. $B \setminus D = \{3 \cdot (2n-1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ v. $C \times D = \{(4m, 6n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

2. Relationen, Abbildungen

a) Sei $f : S \to T$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die durch $x \approx y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ auf S definierte Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung 2a
Seien $a, b, c \in S$.
symmetrisch: $a \approx b \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b \approx a$
transitiv: $a \approx b$ und $b \approx c \Rightarrow f(a) = f(b)$ & $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow a \approx c$
reflexiv: $f(a) = f(a) \Rightarrow a \approx a$

b) Welche der folgenden Aussagen sind (bezüglich der Abbildungsgraphenmengen) mit A, B, C, D wie in Aufg. 1 richtig, welche falsch – und warum?
i. $D^C \subseteq A^C$ ii. $C^D \subseteq A^B$ iii. $C^A \subseteq C^D$

Lösung 2b
i. F: Eine Abbildung f auf D enthält kein Paar $(3,x)$, eine Abbildung auf B tut das.
ii. F: Eine Abbildung f auf D enthält kein Paar $(2,x)$, eine Abbildung auf A tut das.
iii. W: Eine linkstotale, rechtseindeutige Teilmenge von $C \times D$ ist auch eine linkstotale, rechtseindeutige Teilmenge von $C \times A$, denn ein Paar $(c,d) \in C \times D$ ist wegen $D \subseteq A$ (denn $6 \cdot n = 2 \cdot (3n)$), also $d \in A$, auch Element von $C \times A$.

kein weiterer **Tipp** zu **E1** nötig

3. Bildmenge

Bildmengen $f[A]$ werden häufig auch als $f(A)$ geschrieben. Zeigen Sie anhand einer Abbildung auf { 1, {1}}, dass dies zu inakzeptablen Mehrdeutigkeiten führt.

Lösung 3
Sei z.B. $f(1) = a$, $f(\{1\}) = a$. Dann bedeutet $f(\{1\})$ (d.h. a) aber gleichzeitig $f[\{1\}]$, d.h. $\{f(1)\}$, d.h. $\{a\}$. Das klappt nur wenn $a = \{a\}$. Und das ist in jeder üblichen Art Mengenlehre falsch. Etwa so wie ein Apfel nicht dasselbe ist wie eine Plastiktüte mit einem Apfel darin. (Beißen Sie mal rein …).

4. Abbildungen

a) Geben Sie alle möglichen Abbildungen von {1,2} nach {a,b,c} an.

Lösung 4a
Wir beschreiben der Kürze wegen jede Funktion f kurz durch das 2-buchstabige Wort $f(1)f(2)$. Dann gibt es die 9 Abbildungen *aa*, *ab*, *ac*, *ba*, *bb*, *bc, ca*, *cb*, *cc*.

b) Geben Sie alle möglichen Funktionen von {1,2,3} nach {a,b} an.

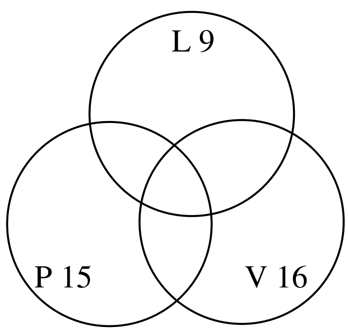
Lösung 4b
Wir beschreiben der Kürze wegen jede Funktion f kurz durch das 3-buchstabige Wort $f(1)f(2)f(3)$. Dann gibt es die 8 Abbildungen *aaa*, *aab*, *aba*, *abb*, *baa*, *bab, bba*, *bbb*

c) Welche von ihnen sind
i. injektiv? ii. surjektiv? iii. bijektiv?

Lösung 4c
(zu a) injektiv: *ab*, *ac*, *ba*, *bc, ca*, *cb*. surjektiv: – bijektiv: –
(zu b) injektiv: –. surjektiv: *aab*, *aba*, *abb*, *baa*, *bab, bba.* bijektiv: –
Es gibt bijektive Abbildungen ohnehin nur zwischen Mengen mit gleichvielen Elementen.

Tipp zu **E2**

Schreiben Sie die anderen gegebenen Zahlen geeignet hinein, sowie dann die Zahlen, die Sie daraus folgern können.



Wiederholung Induktion, Rekursion

5. Induktive Mengendefinition

Definieren Sie induktiv über dem Alphabet *Alph*={*a*,*b*}

a) die Sprache aller Wörter, die eine ungerade Anzahl von Buchstaben enthalten,
b) die Sprache aller Palindrome, d.h. der Wörter, die sich rückwärts wie vorwärts lesen,
c) die Sprache aller doppelten Wörter *ww*.

Lösung 5

a) $a, b \in L_a$, $\quad w \in L_a \Rightarrow waa, wab, wba, wbb \in L_a$

b) $\varepsilon, a, b \in L_b$, $\quad w \in L_b \Rightarrow awa, bwb \in L_b$

c) ε, $\quad ww \in L_c \Rightarrow wawa, wbwb \in L_c$ (Beachte: $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon$)

bzw. (etwas strenger) mit gleichzeitig rekursiv definierter Abbildung *halb* so dass *halb*(*ww*)=*w*:

$w \in L_c \Rightarrow halb(w)\, a\, halb(w)\, a \in L_c$ und $halb(w)\, b\, halb(w)\, b \in L_c$,

wobei $halb(\varepsilon) := \varepsilon$, und $halb(halb(w)\, x\, halb(w)\, x) := halb(w)\, x$ für $x = a$ oder *b*.

6. Rekursive Funktionsdefinition und induktiver Beweis

a) Beweisen Sie $1 + ... + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Lösung 6a

Ind.-Basis: Es stimmt für *n*=0, denn 0=0x1/2.
Ind.-Ann.: Es stimme für *n*.
Ind.-Schritt: Dann ist

$$1 + ... + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n \cdot (n+1) + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$$

D.h. es stimmt für *n*+1.

b) Wenn wir die Addition noch gar nicht kennen, sondern (für jedes *m*) $m + n$ als einstellige Funktion „$m^+(n)$" rekursiv für das Argument *n* so definieren:

$m + 0$ bzw. $m^+(0)$:= *m*,
$m + succ(n)$ bzw. $m^+(succ(n))$:= $succ(m+n)$ bzw. $succ(m^+(n))$,

wie können wir dann die Assoziativität $l + (m+n) = (l+m) + n$ beweisen?

Lösung 6b

Induktion über *n*:

Ind.-Basis: Die Aussage „Für alle *l*,*m*: $l + (m+n) = (l+m) + n$" gilt für $n = 0$, denn $l + (m+0) = l + m = (l+m) + 0$.
Ind.-Ann.: Es gelte für *n*: „Für alle *l*,*m*: $l + (m+n) = (l+m) + n$."
Ind.-Schritt: Dann ist

$$\begin{aligned} l + (m + succ(n)) &= l + succ(m+n) \\ &= succ(l + (m+n)) \\ &= succ((l+m) + n) \\ &= (l+m) + succ(n) \end{aligned}$$

Anschlussübung:

Schreiben Sie die Aussage und ihren Beweis komplett in der $m^+(n)$-Schreibweise.

c) Beweisen Sie für die Länge und Verkettung von Wörtern über Σ: $l(v \circ w) = l(v) + l(w)$.

Lösung 6c
Mit Hilfe der induktiven Definitionen beweisen wir jetzt $l(w \circ w') = l(w) + l(w')$ per Induktion über w :
Ind.-Basis: $l(v \circ \varepsilon) = l(v) = l(v) + 0 = l(v) + l(\varepsilon)$
Ind.-Ann.: $l(v \circ w) = l(v) + l(w)$,
Ind.-Schritt: dann $l(v \circ (wa)) = l((v \circ w)a) = l(v \circ w) + 1 = l(v) + l(w) + 1 = l(v) + l(wa)$.

d) Mathematikerin Martha und ihre Freundin Bertha:
M: Die Männer sind doch alle gleich!
B: Irgendwie schon.
M: Das kann ich sogar mathematisch beweisen: Alle Männer sind identisch.
B: Nee, ernsthaft?
M:
1. Nimm mal n=1, also einen Mann M1: In der Menge {M1} sind alle identisch.
2. Nimm nun an, das gilt für alle Mengen von jeweils n Männern,
3. und stelle Dir eine Menge {M1, …, Mn+1} von n +1 Männern vor.
4. Wenn Du den ersten oder den letzten rausschickst, hast Du jeweils eine Menge von n (wegen (2) identischen) Männern, {M2, …, Mn+1} bzw. {M1, …, Mn},
5. also jeweils alle identisch mit M2.
6. Also sind, da „=“ transitiv ist, alle n +1 Männer in {M1, …, Mn+1} identisch.
7. Also sind per Induktion alle in der endlichen Menge aller Männer identisch.
8. Das nennt man „vollständige Induktion“, einen induktiven Beweis auf der induktiv definierten Menge der natürlichen Zahlen.

B: Einerseits ist für mich der Erwin der einzige Mann in meinem Leben, insofern stimmt deine Aussage fast. Aber dein Beweis ist nicht ganz korrekt. Immerhin, das muss ich Dir lassen: Es ist nur ein einziger deiner acht Schritte ausgesprochen falsch, nämlich …
Welcher und warum?

Lösung 6d
Schritt 5 stimmt nicht immer; er scheitert im Fall $n = 1$:
Da ist nach (3) $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\} = \{M_1, M_2\}$. Die beiden Teilmengen $\{M_2, \ldots, M_{n+1}\} = \{M_2\}$ und $\{M_1, \ldots, M_n\} = \{M_1\}$ in (4) bestehen dann tatsächlich beide aus jeweils untereinander identischen Männern, da es ja jeweils nur einer ist. Doch daraus folgt nicht, dass $M_1 = M_2$. Der Schritt erfordert, dass M_2 Element beider Teilmengen ist. Es sieht im Fall $n = 1$ nur so aus, als ob $M_2 \in \{M_1, \ldots, M_n\}$ wäre. Wahr ist das aber nur für $n > 1$.

7. Grammatiken

Geben Sie eine Grammatik für die Palindrome über $\{a,b\}$ an.

Lösung 7
$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

Tipp zu **E3.c**

„Programmieren“ Sie durch eine Grammatik z.B. einen Mechanismus, der

- jeweils zwei gleiche Buchstaben nebeneinander erzeugt, davon aber das zweite Exemplar modifiziert: aA oder bB
- alle Großbuchstaben nach rechts und Kleinbuchstaben nach links „sickern“ lässt, ohne große mit großen oder kleine mit kleinen zu vertauschen (→ Erhaltung der Buchstabenreihenfolge im „halben Wort“!)

Ergänzen Sie die Grammatik so, dass sich noch eine „Verkleinerungsmaschine“ V durch das großgeschriebene Wort fräst, welche

- die Buchstaben klein macht, z.B. von rechts nach links (AV→Va)
- und am Ende verschwindet.

Tipp zu **E4.a**

Zwei Möglichkeiten:
Entweder definieren wir die dreistellige Relation **Pfad(p,a,b)** (p ist Pfad von a nach b) induktiv, oder wir definieren gleichzeitig Pfade induktiv und die Funktionen A und E (Anfangs- und Endknoten) auf Pfaden rekursiv.

8. Baumdefinitionen

Manche Autoren definieren endlich verzweigte geordnete Bäume als Teilmengen von $\mathbb{N}^*$ (Sprache über $\mathbb{N}$), indem sie jeden Knoten mit einer Pfadbeschreibung (im Stile von „und jetzt zum wievielten Kind?“) identifizieren. Geben Sie eine Definition der passenden Sprachen an.

Lösung 8
Beachten:
(a) Der Pfad zur Wurzel ist leer , d.h. ε.
(b) Jedes Anfangsstück eines Pfads ist ein Pfad.
(c) Hat ein Knoten ein n. Kind, dann auch Kinder Nummer 1 bis n–1. – Reicht!
Die Pfadsprachen aller e.v. g. Bäume sind genau die $L \subseteq \mathbb{N}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & L \neq \varnothing \\ \text{(ii)} & u,v \in \mathbb{N}^*,\ uv \in L \Rightarrow u \in L\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon \in L$$

(iii) $ub \in L,\ a,b \in \mathbb{N},\ a < b \Rightarrow ua \in L$

Wie steht es dabei eigentlich mit unendlichen Pfaden/ unendlichen Bäumen? – Erlaubt? Bereits mit erledigt? Mit einem kleinen Trick erledigbar?

Tipps zu E5 bereits vorhanden

AL-Formeln, Wahrheitswerte, Wahrheitstabellen

9. Alternative Schreibweisen

Beschreiben Sie, wie sich die (a) Infix-, (b) polnische und (c) umgekehrt polnische Schreibweise einer aussagenlogischen Formel aus der Baumdarstellung ergeben.

Lösung 9

a) Infix(Baum): [pseudoprogrammiersprachlich]

```
IF Wurzel(Baum) ist Blatt THEN write(Wurzel(Baum))
ELSE IF Wurzel(Baum) ist ¬ THEN
     BEGIN write(,¬'); Infix(Kindbaum) END
ELSE IF Wurzel(Baum) ist 2-stelliger Junktor j THEN
     BEGIN   write(,(');
             Infix(linker Kindbaum);
             write(j);
             Infix(rechter Kindbaum);
             write(,)');
     END;
```

b1) Ab Wurzel *linke* Hand an den Baum, Hand dranlassen und rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *ersten* Passieren aufschreiben.

b2) Polish(Baum): [pseudoprogrammiersprachlich]

```
IF Wurzel(Baum) ist Blatt THEN write(Wurzel(Baum))
ELSE IF Wurzel(Baum) ist ¬ THEN
     BEGIN write(,¬'); Polish(Kindbaum) END
ELSE IF Wurzel(Baum) ist 2-stelliger Junktor j THEN
     BEGIN   write(j);
             Polish(linker Kindbaum);
             Polish(rechter Kindbaum);
     END;
```

c1) Ab Wurzel *linke* Hand an den Baum, Hand dranlassen und rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *letzten* Passieren aufschreiben.

c2) Ab Wurzel *rechte* Hand an den Baum, Hand dranlassen, rund um den Baum laufen, jeden Knoten beim *ersten* Passieren aufschreiben. Am Ende Formel *umdrehen*.

c3) pseudoprogrammiersprachlich …

10. Rekursive Funktionen auf Formeln

Definieren Sie „vernünftig“ *Sub*(φ), *Grad*(φ) und *Tiefe*(φ).

Lösung 10

$Sub : Form \to \mathbf{P}(Form)$

$Sub(A_i) := \{A_i\}$

$Sub(\neg\varphi) := Sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$

und für $\mathbf{j}$ = $\wedge$, $\vee$, $\to$, bzw. $\leftrightarrow$: $Sub(\varphi\,\mathbf{j}\,\psi) := Sub(\varphi) \cup Sub(\psi) \cup \{(\varphi\,\mathbf{j}\,\psi)\}$

$Grad : Form \to \mathbb{N}_0$

$Grad(A_i) := 0$

$Grad(\neg\varphi) := Grad(\varphi) + 1$

und für $\mathbf{j}$ = $\wedge$, $\vee$, $\to$, bzw. $\leftrightarrow$: $Grad(\varphi\,\mathbf{j}\,\psi) := Grad(\varphi) + Grad(\psi) + 1$

$Tiefe : Form \to \mathbb{N}_0$

$Tiefe(A_i) := 0$

$Tiefe(\neg\varphi) := Tiefe(\varphi) + 1$

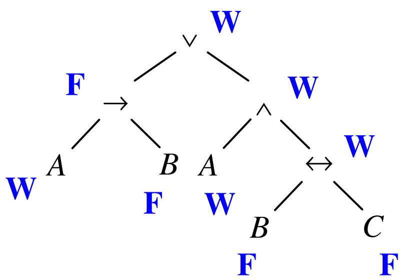
und für $\mathbf{j}$ = $\wedge$, $\vee$, $\to$, bzw. $\leftrightarrow$: $Tiefe(\varphi\,\mathbf{j}\,\psi) := \max(Tiefe(\varphi) + Tiefe(\psi)) + 1$

11. Wahrheitswert, rekursiv

a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum der Formel $(A \to B) \vee (A \wedge (B \leftrightarrow C))$.

b) Schreiben Sie an alle Knoten dieses Syntaxbaumes den zugehörigen Wahrheitswert unter der Belegung $A \mapsto$ W, $B \mapsto$ F, $C \mapsto$ F.

Lösung 11



12. Junktoren in natürlicher Sprache

Schreiben Sie die folgenden Sätze jeweils sinn- und möglichst textgetreu als eine AL-„Formel“, in der Sätze natürlicher Sprache mit Junktoren verbunden sind. Ignorieren Sie dabei wertende Beiklänge.

Beispiel:

Franz und Nadia sind Studenten. $\mapsto$ (Franz ist Student) $\wedge$ (Nadia ist Studentin)

a) Wenn du fährst, fahre ich auch.
b) Ich fahre nur wenn du auch fährst.
c) Weil du fährst, fahren er und ich auch.
d) Ich fahre nicht, es sei denn, du fährst auch.
e) Es regnet morgen, vielleicht aber auch erst übermorgen.
f) Linda arbeitet, obwohl sie krank ist.
g) Tim ist ein guter Tänzer und Schwimmer.
h) Wenn Franz singt, dann nervt er.
i) Wenn Franz singt, dann nervt das.

Lösung 12 Teilsätze sind abgekürzt wiedergegeben:

a) Df $\rightarrow$ If
b) If $\rightarrow$ Df (auch If $\leftrightarrow$ Df ?)
c) Df $\wedge$ (Ef $\wedge$ If)
d) If $\rightarrow$ Df (auch If $\leftrightarrow$ Df ?)
e) rm $\vee$ rüm
f) La $\wedge$ Lik
g) TigT $\wedge$ TigS
h) Fs $\rightarrow$ Fn
i) Fs $\rightarrow$ F's Gesang nervt

Bemerkung 1: Beachten Sie die sprachlichen Varianten von $\rightarrow$ und $\wedge$.
Bemerkung 2: Gelegentlich (vgl. z.B. d) würde man im Alltag evtl. „fairerweise" $\leftrightarrow$ anstatt $\rightarrow$ als gemeint erwarten → Interpretationsdivergenzen!
Bemerkung 3: (i) ist verschieden von (h): Es könnte in (h) ja sein, dass sein Gesang OK ist, dass er aber beim Singen übertrieben theatralische Gesten macht etc. Außerdem kann man bei (i) noch diskutieren, ob mit *das* F's *derzeitiger* Gesang gemeint ist, und ob damit die zweite Aussage, wenn F gerade nicht singt, falsch oder sinnlos (keine Aussage) ist.

13. Wahrheitswerteverlauf, Wahrheitstafel

a) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \rightarrow B) \vee (\neg B \wedge A)$.

Lösung 13a

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$(\neg B \wedge A)$	$(A \rightarrow B) \vee (\neg B \wedge A)$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	F	W

A	$\rightarrow$	B	$\vee$	$\neg$	B	$\wedge$	A
W	W	W	**W**	F	W	F	W
W	F	F	**W**	W	F	W	W
F	W	W	**W**	F	W	F	F
F	W	F	**W**	W	F	F	F

Alternativ in *modifizierter Tabellenform*:

Man schreibt von jeder Teilformel nur den „obersten Operator", dafür aber meist einige Teilformeln mehrfach.

b) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \wedge \neg(B \vee C)$.

Lösung 13b

A	B	C	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	$B \vee C$	$\neg(B \vee C)$	$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \wedge \neg(B \vee C)$
W	W	W	W	W	W	F	F
W	W	F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	W	W	F	F
W	F	F	F	W	F	W	W
F	W	W	W	W	W	F	F
F	W	F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W	F	F
F	F	F	W	F	F	W	F

kein **Tipp** zu **E6**

14. Andere Junktoren

Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \uparrow (B \rightarrow (A \downarrow (B \leftarrow A))))$.

Lösung 14

A	B	$B \leftarrow A$	$A\downarrow(B\leftarrow A)$	$B\rightarrow(A\downarrow(B\leftarrow A))$	$A\uparrow(\ldots)$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F
F	W	W	F	F	W
F	F	W	F	W	W

15. Junktoren und Operatoren

a) Geben Sie die 4 einstelligen logischen Operatoren(semantiken) an.
b) Gibt es nullstellige?

Lösung 15 a,b

a)

A	$\top$	$\bot$	A	$\neg A$
W	W	F	W	F
F	W	F	F	W

b) Im $\top\bot$-Dialekt die beiden Konstanten.

c) Schreiben Sie eine Wahrheitstafel für if-then-else.

Lösung 15 c

A	B	C	$A \rightarrow B / C$
W	W	W	W
W	W	F	W
W	F	W	F
W	F	F	F

A	B	C	$A \rightarrow B / C$
F	W	W	W
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

d) Ergänzungsaufgabe Wie viele der n-stelligen Junktoren (Werteverläufe) hängen echt von allen n Argumenten ab (und wie formalisiert man diese Abhängigkeit?) [Beantworten Sie zunächst die Frage in Klammern.]
Die allgemeine Anzahl als Funktion von n ist für kleine n zu bestimmen. Eine geschlossene Formel oder induktive Definition für alle n bleibt Ihnen überlassen..

Tipp 15d (Formaliserungsteil)

$f(A_1,\ldots,A_n)$ ist „eigentlich unabhängig" von A_i, wenn für alle Belegungen

$$f(A_1,\ldots,A_n) = f(A_1,\ldots,A_{i-1},\neg A_i, A_{i+1},\ldots,A_n).$$

Andernfalls (von keinem Argument unabhängig) hängt f echt von allen Argumenten ab.

(Anzahl für kleine *n*)

Von den vier 1-stelligen Operatoren (booleschen Funktionen) sind 2 von mindestens einem Argument eigentlich unabhängig. Von den 16 2-stelligen Junktoren sind 6 eigentlich von mindestens einem Argument unabhängig.

Tipps zu E6 Erste Werte für $n = 0,1,2,3$ ermitteln. Dann Bildungsregel erraten oder als Folgenanfang bei OEIS eingeben.

Semantische Begriffe

16. Semantische Kategorien von Formeln

Welche der folgenden Formeln sind ...

	erfüllbar	unerfüllb.	konting.	allgemeing.	widerlegb.?
a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$					
b) $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$					
c) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$					

Geben Sie im Falle der Kontingenz jeweils ein Modell bzw. Gegenbeispiel an, und geben Sie im Falle der Allgemeingültigkeit bzw. Unerfüllbarkeit eine Begründung.

Lösung 16

	erfüllbar	unerfüllb.	konting.	allgemeing.	widerlegb.?
a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	x	–	–	x	–
b) $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	x	–	x	–	x
c) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$	–	x	–	–	x

Begründungen:

a) Formlose Begründung: $(A \leftrightarrow B)$ ist W $\Leftrightarrow$ A und B sind W, oder A und B sind F.
$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ ist W $\Leftrightarrow$ A und B sind W, oder A und B sind F.
$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ ist immer W, wenn beide Seiten den gleichen Wert haben, also (s.o.) immer.

b) Modell: z.B. A,B sind W. Gegenbeispiel? Dann müsste $(A \vee B)$ W und $(A \rightarrow B)$ F sein. Wegen letzterem müsste A W und B F sein. Dies klappt als Gegenbeispiel.

c) Formlose Begründung: In einem Modell dürfte wegen $(A \rightarrow B)$ nicht gleichzeitig A W und B F sein und muss wegen $(A \wedge \neg B)$ gleichzeitig A W und B F sein. Das geht also nicht.

ODER jeweils: Formelle Begründung, Modelle, Gegenbeispiele mit Wahrheitstafel

17. Tautologien und Wahrheitstafeln

a) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Distributivität von *oder* über *und*, d.h. dass $((P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ eine Tautologie ist.

Lösung 17a

P	Q	R	$Q \wedge R$	links: $P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	rechts: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	links $\leftrightarrow$ rechts
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	F	F	F	F	W

b) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Implikationsauflösung, d.h. dass $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ eine Tautologie ist.

Lösung 17b

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W

18. Kombinatorische Aufgaben – und ihre Grenzfälle

a) Anne sagt: Bea und Chris werden als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Anne hat gerade gelogen.
Chris sagt dann: Anne hat gerade die Wahrheit gesagt.
Wer hat gelogen, wer nicht?

Lösung 18a

A, B, C: Anne, Bea, Chris sagt in ihrer obigen Aussage die Wahrheit.
$\neg A$, $\neg B$, $\neg C$: Anne, Bea, Chris lügt in ihrer obigen Aussage.
Die drei Fakten bedeuten dann $(A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$, $B \leftrightarrow \neg A$ und $C \leftrightarrow A$.
Gesucht ist die (hoffentlich einzige) Belegung von A, B, C, die alle drei Fakten wahr macht.
Mit Wahrheitstafel ergibt sich: Bea sagt die Wahrheit; Anne und Chris lügen.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg C$	$A \leftrightarrow \ldots$	$\neg A$	$B \leftrightarrow \neg A$	$C \leftrightarrow A$
W	W	W	F	F	F	F	F	F	W
W	W	F	F	W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	F	F	F	F	W	W
W	F	F	W	W	W	W	F	W	F
F	W	W	F	F	F	W	W	W	F
F	**W**	**F**	F	W	F	**W**	W	**W**	**W**
F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	F	W	W	W	F	W	F	W

b) Anne sagt: Bea wird als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Chris wird als Nächstes lügen.
Chris sagt dann: Anna hat gerade gelogen.
Wer hat gelogen, wer nicht?
Was geht jetzt schief? Ist die Aufgabe gut gestellt? Ist es nicht so, dass jeder jeweils entweder gelogen oder die Wahrheit gesagt haben muss?

Lösung 18b
Mit der obigen Methode stellt sich heraus, dass *keine Belegung* die Wissensbasis – $A \leftrightarrow \neg B$, $B \leftrightarrow \neg C$ und $C \leftrightarrow \neg A$ – erfüllt. Man kann nicht einmal sagen, dann hätten halt alle gelogen, denn dann müsste ja die Belegung $A, B, C \mapsto$ F die Wissensbasis erfüllen. Mindestens einige der Aussagen sind also *weder wahr noch gelogen*, sondern *unsinnig*! Und die Aufgabe ist damit falsch gestellt.
Das bekannteste Beispiel dieser Art ist das Lügner-Paradoxon „Ich lüge immer" (oder „Ich lüge eben gerade", oder –klassisch – ein Kreter sagt: „Alle Kreter lügen immer," usw.). Solche Probleme treten immer dann auf, wenn sich Aussagen *zyklisch* auf sich selbst beziehen, sei es direkt oder über andere Aussagen als Zwischenstationen.
Sie treten nicht auf, wenn eine erste Aussage klar wahr oder falsch ist und ansonsten stets höchstens von früher gemachten Aussagen die Rede ist (aber nicht von gegenwärtigen oder zukünftigen). Zum Beispiel: Anne sagt: „Fünf ist eine gerade Zahl", und Bea reagiert mit: „Das stimmt nicht."

c) Anne sagt: Ich sage gerade die Wahrheit.
Hat sie gelogen oder nicht? Ist die Aufgabe gut gestellt?

Lösung 18c
Sagt Anne „Ich sage gerade die Wahrheit" (A), und wäre diese Aussage sinnvoll, dann wäre A genau dann *wahr*, wenn Anne die Wahrheit sagt, denn $A \leftrightarrow A$, und *unwahr*, wenn Anne lügt, denn $A \leftrightarrow \neg\neg A$. Diese Wissensbasis ist mit *beiden* möglichen Belegungen von A erfüllt. Annes Aussage könnte sowohl *wahr* als auch *falsch* sein. Die Aufgabe ist also nicht gut gestellt, da sie zwei Lösungen hat.

d) Ist Aufgabe (a) überhaupt gut gestellt?

Lösung 18d
Trotz der oben gefundenen „Lösung" könnte man auch argumentieren, dass (a) *falsch gestellt* – ja *unsinnig* – ist, da die Inhalte und Wahrheitswerte der zu beurteilenden Aussagen zyklisch – also eigentlich gar nicht – definiert sind. Genauso könnte man übrigens urteilen, dass (c) *unsinnig* ist.

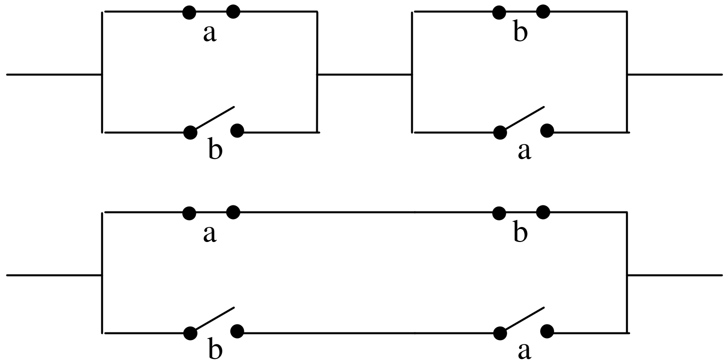
Zusatzaufgabe: Beurteilen Sie nun aus logischer Sicht den Nutzen von Aussagen wie „Diese Erklärung gebe ich im Vollbesitz meiner geistigen Kräfte, freiwillig und ohne Zwang ab.", die für Vollmachten und Verfügungen empfohlen werden. ☹

kein Tipp zu **E7**

Syntax/Semantik

19. Boolesche Schaltwerke

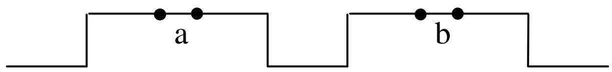
a) Vergleichen Sie die beiden folgenden Schaltwerke. Berechnen Sie dazu deren Formeldarstellungen, und zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln und/oder Tautologien, dass sie bei den gleichen Schalterstellungen leiten.

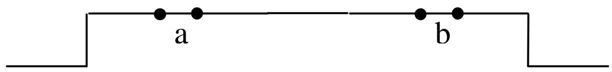


Lösung 19a

Vier Wege zum Äquivalenzbeweis:

(1) Man vergleicht die Existenz leitender Wege bei allen Schalterstellungskombinationen und stellt fest: jeweils oben und unten gleichzeitig ja oder gleichzeitig nein.
Beispiel (1 von 4): *a* aus, *b* aus:

Oben leitet der Weg 

Unten leitet der Weg 

Oder man berechnet die Formeldarstellungen,
oben: $\varphi := (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$
unten: $\psi := (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$,
und zeigt mit Wahrheitstafel …

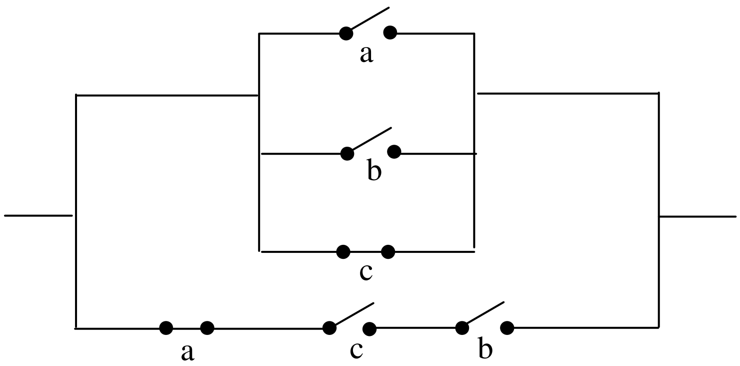
(2) φ und ψ haben den gleichen Wahrheitswerteverlauf, bzw.
(3) $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist eine Tautologie

(klar wie das geht)

(4) Mit einer Kette mittels Tautologien und Ersetzungssatz gerechtfertigter Äquivalenzen zeigt man, dass $\varphi \equiv \psi$:

	<u>wegen Tautologie:</u>
$\varphi = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	
$\equiv (\neg A \wedge (\neg B \vee A)) \vee (B \wedge (\neg B \vee A))$	Distributivität
$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$	2× Distributivität
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee \bot \vee \bot \vee (B \wedge A)$	Tertium non Datur*
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$	2× Absorption
$= \psi$	Kommutativität
	*)weglassbar

b) Berechnen Sie mit Formeldarstellung und Wahrheitstafel alle Schalterstellungs-Kombinationen, bei denen das folgende Schaltwerk leitend verbindet:



Können Sie die Schaltung daraufhin vereinfachen?

Lösung 19b

a) Entsprechende Formel (vgl.u.): $a \vee b \vee \neg c \vee (\neg a \wedge c \wedge b)$.

Wahrheitstafel: (vgl.u.)

a	b	c	$\neg c$	$a \vee b \vee \neg c$	$\neg a$	$\neg a \wedge c \wedge b$	$(a \vee b \vee \neg c) \vee (\neg a \wedge c \wedge b)$
W	W	W	F	W	F	F	W
W	W	F	W	W	F	F	W
W	F	W	F	W	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	F	W
F	F	W	F	F	W	F	F
F	F	F	W	W	W	F	W

Also alle Schalterstellungen leiten bis auf: a `aus`, b `aus`, c `an`

Erläuterungen und Lösungsweg-Alternativen:

Wir haben aus Platzgründen dreifache Kon- und Disjunktionen (UND- bzw. ODER-Ketten) auf einen Schlag (wie dreistellige Junktoren) berechnet. Wenn Ihnen das zu gewagt ist, können Sie die Formel zur gewohnten schematischen Anwendung der Wahrheitstafel noch weiter klammern, so dass Sie beispielsweise mit $((a \vee b) \vee \neg c) \vee ((\neg a \wedge c) \wedge b)$ rechnen. Sie könnten aber auch ein 4-stelliges ODER wagen. Sie erhalten je nach Vorgehen mehr oder weniger Spalten in der Tafel, aber dasselbe Ergebnis.

b) Durch Vergleich der fünften mit der letzten Tabellenspalte sehen wir, dass $a \vee b \vee \neg c$ zur ganzen Formel äquivalent ist. Also können wir die untere Reihenschaltung komplett weglassen.

20. Substitution

Zeigen Sie, in welchem Sinne durch den Substitutionssatz die Variablen P, Q, … für beliebige Aussagevariablen A_i überflüssig werden – z.B. in $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

Lösung 20

Wir brauchen z.B. durch P nicht zu betonen, dass es für beliebige Aussagvariablen anstelle von P gilt (natürliche immer dieselbe Aussagvariable A_i für P). Stattdessen schreiben wir die Tautologie z.B. als $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$, und der Substitutionssatz sagt uns, dass wir für A und B beliebige Aussagevariablen einsetzen dürfen (sogar beliebige Formeln!).

21. Substitution – (Gegen-)Beispiele

a) Geben Sie eine passende widerlegbare AL-Formel und eine Substitution an, so dass die Formel durch die Substitution in eine Tautologie überführt wird.

Lösung 21 a
Beispiel: $A \vee \neg B$ ist kontingent, insbesondere widerlegbar, keine Tautologie; Substitution $[A/B]$ ergibt die Tautologie $B \vee \neg B$.

b) Geben Sie eine AL-Formel und eine Substitution für A und eine Substitution für B an, derart dass beide Hintereinanderausführungen der Substitutionen und deren gleichzeitige Ausführung drei Formeln ergeben, von denen keine zwei äquivalent sind.

Lösung 21 b
Beispiel: Aus der Formel $A \wedge B$ wird unter den Substitutionen $[A/B]$ $[B/A]$ die Formel $A \wedge A$, unter den Substitutionen $[B/A]$ $[A/B]$ $B \wedge B$ und unter der gleichzeitigen Substitution $[A,B\,/B,A]$ die Formel $A \wedge B$. Keine zwei dieser drei Formeln sind äquivalent.

22. Substitution –Hintereinanderausführung

Zeigen Sie: Jede gleichzeitige Substitution an einer Formel ist eine Hintereinanderausführung von Einzelsubstitutionen $[\,A_i\,/\,\varphi_i\,]$.

Vorsicht: Man kann dazu nicht einfach die gleichzeitigen Ersetzungen der einzelnen Aussagevariablen hintereinanderschalten (Warum?).

Tipp: Wie vertauscht man in einem Programm die Werte von a und b?

Lösung 22

Vorsicht-Antwort (Beispiel): $(A \vee B)_{[A,B/B,A]} \not\equiv (A \vee B)_{[A/B][B/A]}$

Tipp-Antwort: Man verwendet dazwischen eine „neutrale“ Variable, z.B. c: c:=a; a:=b; b:=c.

Zeige-Antwort: Es sei φ eine AL-Formel, und es seien die Aussagevariablen $Q_1, \ldots, Q_n$ verschieden
- voneinander,
- von allen $P_1, \ldots, P_n$,
- von allen Aussagevariablen in φ und $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Dann ist $\varphi_{[P_1,\ldots,P_n/\psi_1,\ldots,\psi_n]} \equiv \varphi_{[P_1/Q_1]\ldots[P_n/Q_n][Q_1/\psi_1]\ldots[Q_n/\psi_n]}$.

kein Tipp zu **E8**

23. Ersetzungen

Leiten Sie mittels Ersetzungs- und Äquivalenzsatz aus bekannten Tautologien ab, dass gilt:
$P \to Q \quad \equiv \quad \neg(Q \wedge Q) \to \neg(P \vee \bot)$.

Lösung 23

In *Tautologien* mit oberstem Junktor $\leftrightarrow$ können wir diesen durch $\equiv$ ersetzen (Äquivalenzsatz), und $\equiv$ ist natürlich (wieso natürlich?) transitiv.
Also folgt $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$ aus der *Kontraposition*,
$Q \equiv Q \wedge Q$ aus der *Idempotenz* und $P \equiv P \vee \bot$ aus dem *Absorptionsgesetz*,
insgesamt mit dem Ersetzungssatz also $\neg Q \to \neg P \equiv \neg(Q \wedge Q) \to \neg(P \vee \bot)$,
und wegen der Transitivität von $\equiv$ schließlich $P \to Q \quad \equiv \quad \neg(Q \wedge Q) \to \neg(P \vee \bot)$.

24. Junktorenbasen

a) Suchen Sie über den Basen $\{\neg, \wedge, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils eine möglichst einfache Formel für $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$.

Lösung 24 a

a) Die Wahrheitstafel liefert

P	Q	usw.	$P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
W	W		W
W	F		F
F	W		W
F	F		W

Über die W-Zeilen erhalten wir $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
Mit ODER-Ersetzung $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ könnten wir diese Formel in eine längere über $\{\neg, \wedge\}$ äquivalent umformen (üben!).
Aus der F-Zeile erhalten wir übrigens schneller und kürzer: $\neg(P \wedge \neg Q)$.
Mit den Tautologien *Anti-Distributivität* und *doppelte Negation* können wir wiederum zu $\neg P \vee Q$ gelangen.

b) Verwenden Sie den Satz „Von Junktorenbasen zu Junktorenbasen“, um zu zeigen, dass $\{\neg, \rightarrow\}$ eine Junktorenbasis ist, und suchen Sie über der Basis eine möglichst einfache Formel für $P \wedge Q$ und für $P \vee Q$.

Lösung 24 b

b) $P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow P$
Wie kommt man drauf?
Z.B. über Kontraposition oder $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ und *Doppelnegation*!
$P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$
Wie kommt man drauf? Z.B. über $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$ und das erste Ergebnis!
Da z.B. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ eine Basis ist und alle drei durch $\{\neg, \rightarrow\}$ und $\{\neg, \rightarrow\}$ ausgedrückt werden können, folgt die Basiseigenschaft von $\{\neg, \rightarrow\}$ aus dem Satz *Von Junktorenbasen zu Junktorenbasen*.

kein Tipp zu E8