Multimodale – insbesondere Epistemische – Logik

zum Selbststudium
in Ergänzung zu Skript und Folien der Vorlesung „Logik"
h_da, WS 2015/16 (V 1.2)

Bernd Baumgarten

Inhalt

Dringende Empfehlung

Bearbeiten Sie alle Übungen, sobald Sie im Text darauf stoßen und bevor Sie weiter lesen:

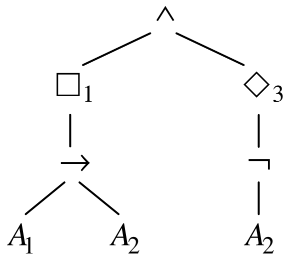
- Lösen Sie die Übung, oder
  versuchen Sie es pro Teilaufgabe mindestens 10 Minuten lang intensiv.
- Vergleichen Sie Ihre Lösung(sversuche) dann mit den Lösungen im Anhang.
- Lesen Sie erst dann weiter.

Multimodale Formeln

Wir kürzen **Multimodale (Aussagen-)Logik** durch **MML** ab. **MML-Formeln** sind definiert als aussagenlogische (AL-) Formeln, ergänzt um **Modaloperatoren** $\Diamond_i$ und $\Box_i$, $i=1,2,\ldots$. Man sieht auch oft <*i*> und [*i*]. Die *i* nennen wir gelegentlich neutral **Modalitätsindizes,** häufiger aber **Aktionen** oder **Akteure**. Die letzten beiden Bezeichnungen erklären sich bald aus Anwendungsbeispielen, siehe unten. Streng genommen definiert man MML-Formeln induktiv wie folgt:

- Jede Aussagevariable A_k, $k=1,2,\ldots$, ist eine MML-Formel.
- Sind φ und ψ MML-Formeln, dann auch
  $\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\to\psi)$ und $(\varphi\leftrightarrow\psi)$.
- Ist φ eine MML-Formel und *i* ein Modalitätsindex, dann auch
  $\Diamond_i\varphi$ und $\Box_i\varphi$.

Eine typische MML-Formel ist $(\square_1 (A_1 \to A_2) \wedge \diamond_3 \neg A_2)$. Sie würde unter der üblichen Auslassung der äußersten Klammern auch als $\square_1 (A_1 \to A_2) \wedge \diamond_3 \neg A_2$ geschrieben. Ihr Syntaxbaum sieht so aus:



Wie in der AL werden wir gelegentlich auch in MML-Formeln andere Namen für die Aussagevariablen wählen, außerdem aber auch für die Modalitätsindizes i. Diese Namen geben in Beispielen oft konkrete Hinweise, und zwar

- Aussagevariablen auf Gegebenheiten in den modellierten Situationen.
- Modalitätsindizes auf
  - Akteure (Kommunizierende oder Wahrnehmende, Menschen oder Maschinen, die z.B. Situationen erforschen) oder
  - Aktionen (die Situationen verändern können),

Wir erinnern uns, dass es in ML nur die nicht indizierten Modaloperatoren $\diamond$ und $\square$ gab,

- $\diamond$ im Sinne von „möglich", genauer: in mindestens einer Folgesituation, und
- $\square$ im Sinne von „notwendig", genauer: in allen Folgesituationen.

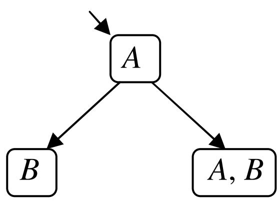
Übung MML1

Wenn wir $\diamond_i$ bzw. $\square_i$ als „es ist i-möglich" bzw. „es ist i-notwendig" lesen, wie würden wir folgende MML-Aussagen formal schreiben? –

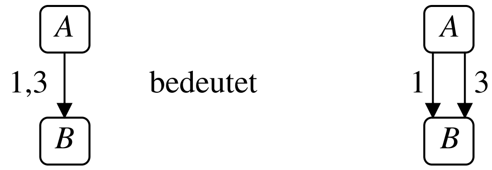
- Es ist 1-notwendig, dass wenn A gilt, dann B 2-möglich ist.
- Wenn A 1-möglich ist, dann ist es 2-notwendig, dass A 1-möglich ist oder B 1-möglich ist. ■

Multimodale Kripke-Semantik

Eine Kripke-Interpretation in der ML war ein gerichteter Graph mit einem ausgezeichneten Anfangsknoten und einer Knotenbeschriftung durch Belegungen (gegeben als Mengen der wahren Aussagevariablen). Sie erlaubte uns, einer ML-Formel einen Wahrheitswert zuzuweisen. Beispielsweise gilt in der folgenden Kripke-Interpretation $A \wedge \square B$ und $\diamond A$, nicht aber $A \to \square A$.



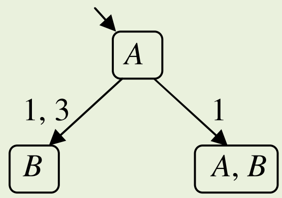
Wenn es in einer Kripke-Interpretation verschiedene Übergangsweisen (Relationen, „Sorten von Pfeilen") gibt, eine für jeden **Modalitätsindex** $i = 1,2,\ldots$, dann spricht man von einer **multimodalen** (oder **MM-**) **Kripke-Interpretation**. Graphisch wird der Modalitätsindex an die Pfeile geschrieben. Ein Pfeil mit einer Indexliste ist als eine Menge gleichlaufender Pfeile mit jeweils einem Index der Liste zu lesen:



Der Wahrheitswert einer MML-Formel in einer MM-Kripke-Interpretation ist analog zum einfach modalen Fall definiert.

Übung MML2

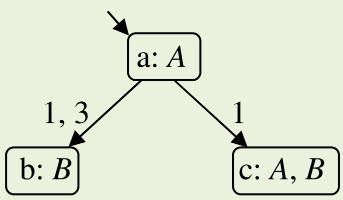
Gilt die MML-Formel $\Box_1(A \to B) \wedge \Diamond_3 \neg B$ in der folgenden Kripke-Interpretation? –



Berechnen können wir einen Wahrheitswert wie in AL und ML, indem wir in einer Wahrheitstafel für jede Belegung der vorkommenden Aussagevariablen eine Zeile anlegen und für jede der wachsend angeordneten Teilformeln in je einer Spalte den Wahrheitswerteverlauf ausrechnen und eintragen, wobei wir ausschließlich Werte aus bereits ausgefüllten Spalten benötigen.

Übung MML3

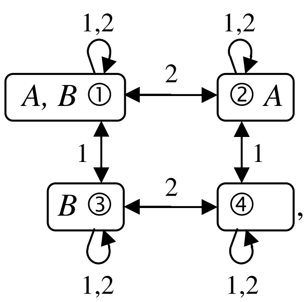
Lösen Sie MML2 mit einer Wahrheitstafel.



[Hier sind die Situationen für die Wahrheitstafel mit den Bezeichnungen a, b, c versehen.]

Wie in ML sind auch **MM-Kripke-Strukturen** von Interesse, denen gegenüber MM-Kripke-Interpretationen lediglich die Festlegung einer Anfangssituation fehlt, beispielsweise

Bild 1:

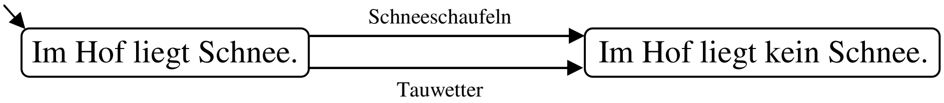


wobei Doppelpfeile als je ein Pfeil in jeder Richtung (mit der gleichen Anschrift(enliste)) zu lesen sind.

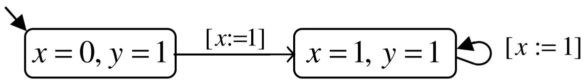
Dynamische Logik (Transitionssysteme, nur angerissen)

Wir beschränken uns auf zwei Anwendungsbereiche der MML, von denen wir aber nur die Epistemische Logik etwas ausführlicher behandeln werden. Zunächst betrachten wir aber kurz die sogenannte Dynamische Logik (DL). Mit DL kann man Aussagen über Systeme mit unterschiedlichen Zustandsübergängen machen und logische Beziehungen zwischen solchen Aussagen untersuchen. Diese Systeme können z.B. Maschinen, Rechner, Roboter und spezielle Prozesse in solchen sein, aber auch z.B. Systeme interagierender Rechtspersonen und Wirtschaftspartner. Das ist nützlich für die Spezifikation und den Test solcher Systeme sowie für Prognosen über deren Verhalten.

Selbsterklärendes Beispiel 1 (für alle, die nicht in den Tropen wohnen):



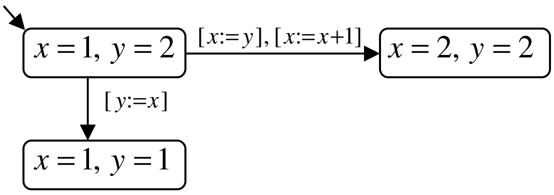
Selbsterklärendes Beispiel 2 (für alle, die schon einmal programmiert haben):



Gilt in einer Situation $y=1$, so gilt nach der Aktion (Wertzuweisung) $x:=1$ auch $x=1$ und natürlich weiterhin $y=1$.

Weiteres (partielles) Programmierlogik-Beispiel

(Achtung: $[x:=y],[x:=x+1]$ bedeutet zwei unterschiedlich beschriftete Kanten, keine Hintereinanderausführung von Anweisungen.):



Übung MML4

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig, bzw. unerfüllbar, bzw. kontingent (d.h. wahr in allen programmiersprachlichen Kripke-Interpretationen der oben gezeigten Art, bzw. in keiner, bzw. weder noch)? Dabei wird davon ausgegangen, dass allen erwähnten (sämtlich ganzzahligen) Variablen in der Ausgangssituation bereits ein Wert zugewiesen wurde.

1. $x=1 \land y=2 \land \Box_{[x:=z]}\, x=y$
2. $x+1=z \land \Box_{[y:=x]}\, y=z$
3. $y>x \to \Box_{[z:=x]}\Box_{[x:=y]}\Box_{[y:=z]}\, x>y$ ■

Elementare Epistemische Logik (Wissenslogik)

In der **Epistemischen Logik** kann man über das Wissen unterschiedlicher Akteure reden, unter anderem auch darüber, was ein Akteur über das Wissen eines anderen Akteurs weiß. Solche Fragen sind beim Kartenspiel genauso wichtig wie in Politik und Wirtschaft, letztlich in allen Bereichen, in denen

- Wissen bzw. Unkenntnis
  - über Situationen
  - und das Wissen Beteiligter über Situationen,
- sowie Kommunikation darüber bzw. diesbezügliche Geheimhaltung

von Belang sind.

Interessanterweise spielen in den genannten Bereichen der Praxis meist auch Wahrscheinlichkeitsaspekte eine Rolle. Beispielsweise sollte möglichst keiner außer mir wissen, dass mein Passwort „GibMir1000000$" lautet. Jeder weiß aber im Prinzip aufgrund der Passwortanforderungen unseres Netzes, dass dies ein mögliches Passwort ist, hält dies also für möglich. Mit welchen Chancen kann jemand in drei Versuchen darauf kommen? (… oder – um in Erinnerung zu rufen, dass die Wirklichkeit meist noch etwas komplexer ist als die schönste Theorie – zunächst herausfinden, mit welchen Tricks er die Anzahl der Versuche heraufschrauben kann?). Wahrscheinlichkeitsaspekte und zusätzliche Komplikationen werden hier aber nicht behandelt.

In der **Epistemischen Logik** (**EL**) gilt zunächst die Aussagenlogik:

Es gelten die **Schlußregeln** der AL (Modus Ponens, Substitutions- und Ersetzungssatz)

(Ax-Schema 0) Alle AL-Tautologien sind EL-Tautologien, d.h. sie gelten in allen Situationen aller EL-Kripke-Strukturen (AL gilt.)

Ferner soll der Situationskontext (die EL-Kripke-Struktur, praktisch z.B. die Regeln und die Phase des Spiels, an dem die Akteure teilnehmen) insoweit bekannt sein, dass jeder alles weiß, was in *allen* möglichen Situationen gilt:

(Ax-Schema 1) Gilt in allen Situationen einer EL-Kripke-Struktur φ, dann auch $\mathsf{K}_i\varphi$.

Mithilfe weiterer Axiome und Ableitungsregeln werden weitere EL- Tautologien hergeleitet.

Mit $i = 1, 2, \dots, m$ (oder auch ausführlicheren Bezeichnungen) bezeichnet man die verschiedenen Akteure eines Kontexts (z.B. Menschen oder Knoten eines Rechnernetzes), die etwas über die Aussagevariablen wissen können. $\Box_i\varphi$ bedeutet: Akteur *i* **weiß**, dass Formel φ gilt. Deswegen schreibt man hierfür oft $\mathsf{K}_i\varphi$ (K wie in know – wissen). Mit „wissen" ist insbesondere gemeint, dass Akteur i φ nicht nur annimmt, bzw. sich das Wissen vielleicht nur einbildet, sondern dass er der *zutreffenden Ansicht* ist, dass φ gilt. Bei der elementaren Wissenslogik geht man also davon aus, dass keine

- Fehlinformationen erhalten,
- falschen Beobachtungen gemacht oder
- unzutreffenden Schlüsse aus vorhandenem Wissen gezogen

werden. Das beinhaltet das Axiom …

(Ax 2) $\mathsf{K}_i\varphi \to \varphi$ (Wissen trifft zu. **Irrtumsausschluss**)

Entsprechend der ML bedeutet $\Diamond_i\varphi$ das Gleiche wie $\neg\mathsf{K}_i\neg\varphi$, nämlich dass Akteur *i* nicht sicher behaupten kann, dass φ nicht gilt, mit anderen Worten: Er **hält** φ **für möglich**. Wir schreiben hierfür auch $\mathsf{P}_i\varphi$ (P wie in possible – möglich):

$$\mathsf{P}_i\varphi \leftrightarrow \neg\mathsf{K}_i\neg\varphi .$$

Die duale Formel

$$\mathsf{K}_i\varphi \leftrightarrow \neg\mathsf{P}_i\neg\varphi$$

ist dann ebenfalls plausibel: „Etwas wissen“ bedeutet „Das Gegenteil für unmöglich halten“.

Jeder Akteur zieht logische Schlüsse aus seinem Wissen. Was aus Wissen folgt, wird auch gewusst:

(Ax-Schema 3) $(\mathsf{K}_i\varphi_1 \wedge \ \ldots \ \wedge \mathsf{K}_i\varphi_n \wedge \ \mathsf{K}_i((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi)) \to \ \mathsf{K}_i\psi$
(Akteure können folgern.)

Jeder Akteur ist sich seines Wissens bewusst:

(Ax 4) $\mathsf{K}_i\varphi \to \ \mathsf{K}_i\mathsf{K}_i\varphi$ (Wer etwas weiß, weiß dass er es weiß. **Positive Introspektion**)

Ax 3 und 4 schließen die reizvollen Situationen gegen Ende vieler Kriminalromane aus, in denen die (gewöhnlich nicht perfekten) Leser eigentlich alle Informationen haben, um sich den Täter zusammen zu reimen, dies aber bislang nicht merkten. Erst wenn der schlaue Detektiv am Ende durch eine zwingende Argumentationskette unter Verwendung bekannter Fakten den Täter entlarvt, stellen die Leser fest, welche dieser Fakten sie nicht beachtet oder nicht zueinander in Beziehung gesetzt hatten.

Jeder Akteur ist sich seines Nichtwissens bewusst:

(Ax 5) $\neg\mathsf{K}_i\varphi \to \ \mathsf{K}_i\neg\mathsf{K}_i\varphi$ (Wer etwas nicht weiß, weiß, dass er es nicht weiß. **Negative Introspektion**.)

In der Kripke-Semantik bedeutet ein von einer Situation S zu einer Situation S' verlaufender i-Pfeil, also $S\ R_i\ S'$, dass Akteur i in der Situation S mangels genauerer Information auch die Situation S' *für möglich hält*. Nichtwissen besteht darin, dass man verschiedene Situationen allein auf der Basis seines derzeitigen Wissens nicht unterscheiden kann.

Man beachte, dass Ax 2 bis 5 in jeder Kripke-Interpretation gelten, während in AxSch 1 verwendet wird, dass φ in allen Situationen der betrachteten EL-Kripke-Struktur gilt.
Redet man nur über Gültigkeit in ganzen Kripke-Strukturen (also jeweils in *allen* Situationen) – und das ist in der Literatur der häufigere Standpunkt – vereinfacht sich das Axiomensystem:

- Aus Ax-Sch. 1 wird (Ax 1) $\varphi \to \mathsf{K}_i\varphi$ (Situationsunabhängiges ist bekannt.)
- Aus Ax-Sch. 3 wird (Ax 3) $(\mathsf{K}_i\varphi \wedge \ \mathsf{K}_i(\varphi \to \psi)) \to \ \mathsf{K}_i\psi$ (Akteure folgern logisch.)

Ax 3 wird auch als **Implikationsdistribution** bezeichnet, da es äquivalent zu
$\mathsf{K}_i(\varphi \to \psi) \to \ (\mathsf{K}_i\varphi \to \ \mathsf{K}_i\psi)$ ist.

In manchen Zusammenhängen werden auch andere, nicht äquivalente, Axiomensysteme verwendet, z.B. unter Auslassung von Introspektionsfähigkeiten. Wir befassen uns hier aber mit der am weitesten verbreiteten Variante, die alle obigen Axiome einschließt.

Satz 1:
Jede der Relationen R_i ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

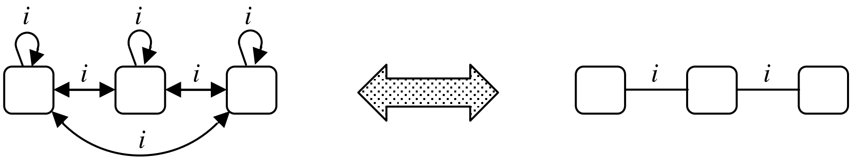
Beweis:
Nach unseren ML-Kenntnissen (Folie „Spezielle Rahmen in Kripke-Semantiken“) sind drei Formeln zu zeigen:

- $\mathsf{K}_i\varphi \to \varphi$ (Ziel: Reflexivität) Das steht im Irrtumsausschluss-Axiom.
- $\mathsf{K}_i\varphi \to \ \mathsf{K}_i\mathsf{K}_i\varphi$ (Ziel: Transitivität) Das folgt aus der positiven Introspektion.
- $\varphi \to \ \mathsf{K}_i\mathsf{P}_i\varphi$ (Ziel: Symmetrie) Das sieht man wie folgt:
Wenn φ, dann $\neg\mathsf{K}_i\neg\varphi$ (sonst $\mathsf{K}_i\neg\varphi$, und damit wegen

Irrtumsausschluss $\neg\varphi$, ein Widerspruch), also per Definition $\mathsf{P}_i\varphi$ und mit der negativen Introspektion $\mathsf{K}_i\mathsf{P}_i\varphi$.

Also gibt es insbesondere für alle beteiligten i und in jeder Situation eine i-Schleife zur gleichen Situation. Zur Vereinfachung der Bilder werden alle diese Schleifen meist weggelassen; man sollte sie aber natürlich im Hinterkopf behalten. Ebenso lässt man der Symmetrie wegen oft die Pfeilspitzen weg, manchmal sogar Kanten, die aus der Transitivität von R_i gefolgert werden können. Man spart sich dann also evtl. die Kante für $S_0\ R_i\ S_k$, wenn die Kanten für $S_0\ R_i\ S_1$, $S_1\ R_i\ S_2$, …, $S_{k-1}\ R_i\ S_k$ bereits gezeichnet sind.

Die insgesamt möglichen Vereinfachungen verdeutlicht folgendes Beispiel:

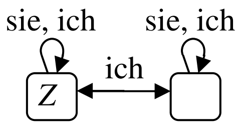


Übung MML5

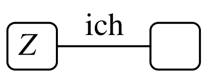
Welche der folgenden Formeln sind – unter der Voraussetzung aller EL-Axiome – für Kripke-Interpretationen (mit Anfangssituation) allgemeingültig (d.h. immer wahr), bzw. unerfüllbar (d.h. nie wahr), bzw. kontingent (d.h. mal wahr, mal nicht)? Wenn möglich, begründen Sie die Formel bzw. ihre Negation. Wenn nicht, geben Sie bitte eine Kripke-Interpretation an, in der die Formel gilt, und eine, in der sie nicht gilt.

1. $(\mathsf{K}_i A \wedge \mathsf{K}_i B) \leftrightarrow \mathsf{K}_i(A \wedge B)$
2. $(\mathsf{K}_i A \vee \mathsf{K}_i B) \leftrightarrow \mathsf{K}_i(A \vee B)$
3. $\mathsf{P}_i A \wedge \mathsf{K}_i \neg A$
4. $\mathsf{K}_i \mathsf{K}_k A \rightarrow \mathsf{K}_k \mathsf{K}_i A$ ■

Wenn meine Frau morgens den Briefkasten öffnet, so weiß zunächst sie – aber ich noch nicht – ob die Zeitung schon gekommen ist (Z oder $\neg Z$), als Kripke-System also:

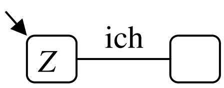


oder sparsamer gezeichnet:



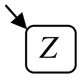
.

Aus Sicht meiner Frau, die ja weiß, ob die Zeitung da ist, ist im Diagramm dann sogar eine Situation als Anfangssituation ausgezeichnet – es ist also eine Kripke-Interpretation, z.B.



.

Wenn sie dann hereinkommt und mir die Zeitung in ihrer Hand zeigt, wissen wir beide, dass die Zeitung da ist, so dass die rechte Situation im Bild (in der $\neg Z$ gilt) von keinem mehr für möglich gehalten wird bzw. ganz entfällt:



(bzw. ausführlich 

).

In dieser Kripke-Interpretation gelten z.B. folgende Aussagen:

- Z — Die Zeitung ist da.
- $\neg Z \rightarrow Z$ — [Dies folgt aussagenlogisch aus Z.]
- $\mathsf{K}_{ich} Z$ — Ich weiß, dass die Zeitung da ist.
- $\mathsf{K}_{sie} Z$ — Sie weiß, dass die Zeitung da ist.

aber auch z.B.

- $\mathsf{K}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$ — Sie weiß, dass ich weiß, dass die Zeitung da ist.

Übung MML6

Begründen Sie die Gültigkeit von $\mathsf{K}_{sie} Z$ und $\mathsf{K}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$ in der obigen Kripke-Interpretation. ■

Wenn ich nun aber meine Frau schon durchs Fenster beobachten kann – was wir beide wissen – und tatsächlich gesehen habe, dass sie die Zeitung in der Hand hält – was sie nicht bemerkt hat – dann weiß meine Frau *nicht*, dass ich weiß, dass die Zeitung da ist: $\neg\mathsf{K}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$. Sie hält es lediglich für *möglich*: $\mathsf{P}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$.

Übung MML7

In welcher möglichst kleinen Kripke-Semantik gelten diese beiden Formeln (d.h. $\neg\mathsf{K}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$ und $\mathsf{P}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$) ? Und wie könnte diese praktisch entstanden sein? ■

Übung MML8

Zeichnen Sie eine Kripke-Struktur die folgendes Situationsgeflecht wiedergibt:

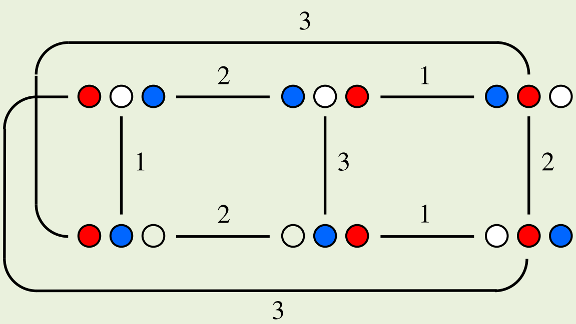
Ein Helfer malt zwei einander mit verbundenen Augen gegenüber sitzenden Personen je einen Farbtupfer auf die Stirn, der entweder schwarz oder weiß ist. Dann erklärt er, was er getan hat, und die Personen dürfen die Binden abnehmen und einander anschauen. A (bzw. B) bedeutet, dass Person 1 (bzw. 2) einen *schwarzen* Fleck hat. ■

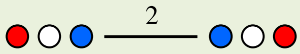
Übung MML9

Drei Personen erhalten jede eine Karte. Es handelt sich – und das wird allen Dreien mitgeteilt – insgesamt um eine rote, eine weiße und eine blaue Karte. Jede Person betrachtet nur ihre Karte. Wenn wir eine Kartenverteilung durch beispielsweise

 für: > P1 hat die rote, P2 die weiße und P3 die blaue Karte <

modellieren, so hat sich der folgende Kontext aus Situationen und Wissen darüber ergeben:



a) Erklären Sie eine der Kanten, z.B. 

b) Stellen Sie den Kontext formaler als MML-Kripke-Struktur[1)] dar, mit Aussagevariablen wie R_1 (für „P1 hat die rote Karte“).

[1)] Nicht K.-Interpretation; es wurde ja nicht gesagt, wer welche Karte hat.

c) Drücken Sie aussagenlogisch das Wissen von P1 aus, wenn P1 im Besitz der roten Karte ist: „Jeder von uns hat eine der Karten rot/weiß/blau, und zwar jeder eine andere, und ich, P1, habe die rote.“ ■

EL-Werkzeugkasten

(zur Ergänzung, kein Prüfungsstoff; vgl. Huth/Ryan)

Aus den EL-Axiomen und der Bedeutung von K_i und P_i ergeben sich für den AL-Werkzeugkasten zusätzliche Ableitungsregeln und Beweisschemata für die aussagenlogische Wissenslogik. Diese beziehen sich jeweils auf nur einen Akteur und entsprechen den Ausführungen auf den Folien mit K_i für $\Box$ und P_i für $\Diamond$.

Häufig wird der Beweis einer EL-Formel oder die Herleitung einer EL-Formel aus Prämissen einfacher, wenn wir die auch in MML (also insbesondere auch EL) gültigen Substitutions- und Ersetzungstheoreme verwenden.

Mehrseitiges Wissen und Wissensvermittlung

Bereits im Beispiel mit der Morgenzeitung haben wir gesehen, dass ein Akteur nach Hinzugewinn von Wissen (durch Beobachtung oder erhaltene Mitteilung) mehr Situationen unterscheiden oder manche Situationen ganz ausschließen kann. Kommunikation von Wissen geschieht u.a. durch Mitteilungen an einzelne Akteure oder durch allgemeine Ansagen.

Es gibt mehrere Arten gemeinsamen Wissens:

1. Alle wissen φ, wenn sie ihr Wissen zusammenbringen, φ, geschrieben $\mathsf{D}\varphi$ mit D wie **distributed knowledge** (verteiltes Wissen),
   also bei m Akteuren: $\mathsf{K}_1\varphi_1 \wedge \mathsf{K}_2\varphi_2 \wedge \dots \wedge \mathsf{K}_m\varphi_m \wedge ((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m) \rightarrow \varphi)$

Besipiel: Zwei Freunde würden sich einen Eisbecher teilen, wenn sie wüssten, dass ihr Geld zusammen für einen solchen reicht. Jeder weiß zunächst nur, was er in der Tasche hat, und das reicht alleine nicht. Erst nach gegenseitiger Information kommen sie zum entscheidenden Gesamtwissen.

2. Alle wissen φ, geschrieben $\mathsf{E}\varphi$ mit E wie **everyone knows** (jeder weiß),
   also bei m Akteuren: $\mathsf{K}_1\varphi \wedge \mathsf{K}_2\varphi \wedge \dots \wedge \mathsf{K}_m\varphi$

Das heißt aber nicht unbedingt, dass alle wissen, dass alle φ wissen, (geschweige denn, dass alle wissen, dass alle wissen, dass alle φ wissen usw.).

Der Unterschied zwischen „Alle wissen φ“ und der stärkeren Aussage (vgl. Ax 2) „Alle wissen, dass alle φ wissen“ wird durch die vorweihnachtliche Situation illustriert, in der die Kinder nach heimlicher Suche im Keller bereits ihre Weihnachtsgeschenke wissen, was die Eltern vielleicht prinzipiell für möglich aber nicht für sicher halten. Ergebnis: Alle (Akteure, nämlich Personen der Familie) wissen, was die Kleinen bekommen, aber nicht alle wissen, dass es alle wissen.

3. Öffentliche-Ansage-Wissen, geschrieben $\mathsf{C}_i\varphi$
   mit C wie **c**ommon knowledge = allgemeines Wissen,

   (1) Alle wissen φ, also $\mathsf{E}\varphi$, und
   (2) Alle wissen, dass es alle wissen, d.h. alle wissen (1), also $\mathsf{E}\,\mathsf{E}\varphi$, und
   (3) alle wissen (2), also $\mathsf{E}\,\mathsf{E}\,\mathsf{E}\varphi$,

   … und so weiter, d.h. induktiv formuliert:

   (0) φ,

   und für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

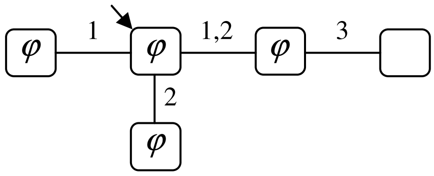
   $(n+1)$ Alle wissen (n).

Was wir in dieser Einführung nicht weiter behandeln: Man kann man diese Wissensarten auch auf beliebige *Teilmengen der Akteure* beschränken. Das ist besonders in der Kryptographie und allgemeiner im Rahmen der IT-Sicherheit von Interesse. Beispielsweise möchte eine Benutzergruppe vielleicht ein gemeinsames Passwort verwenden, das andere nicht kennen, um durch Ver- und Entschlüsselung den Informationsaustausch auf diesen Benutzerkreis zu beschränken. Dies wiederum zieht Fragen zu Schlüsselgenerierung und -austausch sowie zum Berechtigungsnachweis bei An- und Abmeldungen bei Benutzerkreisen, also weitere Wissensfragen nach sich. In diesem Rahmen muss man dann über eine Wissensvermittlung logisch argumentieren können, die auf Teilmengen der Akteure beschränkt ist.

Satz 2:
In einer Kripke-Interpretation mit Startsituation S gilt

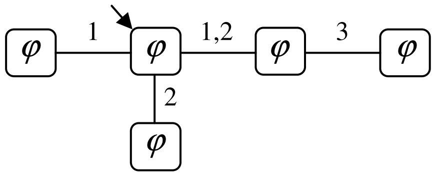
- $\mathsf{E}\ \varphi$ genau dann, wenn für alle Akteure $i = 1, \ldots, m$ gilt, dass in allen Situationen T mit $S\ R_i\ T$ (also in allen mit S direkt verbundenen Situationen[1]) φ gilt;

  Bsp., symbolisch:

- $\mathsf{C}\ \varphi$ genau dann, wenn für alle alle Folgen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ von Akteuren $i_k \in \{1, \ldots, m\}$ gilt, dass in allen Situationen T mit $S\ R_{i_1} R_{i_2} R_{i_n}\ T$ (also in allen mit S verbundenen Situationen[1]) φ gilt;

  Bsp., symbolisch:

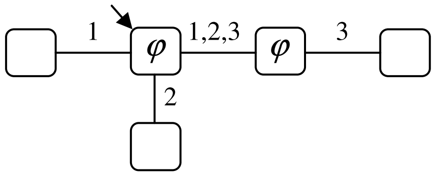
  

- $\mathsf{D}\ \varphi$ genau dann, wenn in allen Situationen T mit der Eigenschaft „für alle Akteure $i = 1, \ldots, m$ gilt, dass $S\ R_i\ T$ " (also in allen mit S für alle Akteure direkt verbundenen Situationen[1]) φ gilt.

---

[1] … und diese schließen wegen Reflexivität S mit ein

Bsp., symbolisch:



Was wir hier nicht weiter ausführen:
In der EL-Literatur werden der *Werkzeugkasten* und die *axiomatischen Kalküle* um Regeln für D, E und C erweitert. Ebenso findet man modale Erweiterungen der AL-*Tableaumethode* für MML allgemein oder EL im Besonderen.

Hier sollen nur einige einfache Überlegungen zu einfachen Beispielen demonstriert werden.

Man fragt sich bei der Erklärung von $\mathsf{C}\varphi$ gewöhnlich zunächst, was das Wissen über Wissen über Wissen etc. eigentlich noch bringen kann. Ein schlagendes Beispiel dazu ist ein seit 1832 bekanntes Rätsel, das sog. **Muddy-Children-Puzzle**: Drei logisch denkende und gehorsame Geschwister spielen am Bach. Als sie nach Hause kommen, sagt ihr Vater: „Mindestens einer von Euch hat einen Schlammfleck auf der Stirn. Wer weiß, dass er Schlamm auf der Stirn hat, soll jetzt bitte sofort vortreten.“ Die Kinder können einander alle sehen, nicht aber ihre eigene Stirn. Alle Kinder bleiben stehen. Der Vater wiederholt nach kurzem Abwarten die Aufforderung „Wer weiß, dass er Schlamm auf der Stirn hat, soll jetzt bitte sofort vortreten.“ Nun treten genau die beiden Kinder mit einem Schlammfleck vor.

- Was haben sich die Kinder gedacht, um richtig zu reagieren?
- Und, was noch rätselhafter ist, ja zunächst paradox klingt: Wieso klappt das *nicht ohne die erste Aussage* des Vaters, obwohl doch jedes der drei Kinder mindestens eines mit einem Schlammfleck sieht, die Aussage also *gar nichts vorher Unbekanntes* beinhaltet?

Betrachten wir die logisch korrekten Reaktionen der S-Kinder (mit Schlamm) und des O-Kindes (ohne Schlamm) in jeder Phase.

Unmittelbar nach Aufforderung 1:
S-Kinder & O-Kind denken: Ich kann nach meinem bisherigen Wissen sowohl O- als auch S-Kind sein, bleibe also stehen (was dann auch alle sehen und nun wissen).

Einen Moment nach Aufforderung 1:
S-Kinder denken: Ich sah ein S- und ein O-Kind. Wäre ich ein O-Kind, so hätte das (einzige) S-Kind zwei O-Kinder gesehen und wegen Vaters Ansage gewusst, dass es das S-Kind sein muss und wäre vorgetreten. Da das nicht geschah, muss ich ein S-Kind sein.
O-Kind denkt: Ich sehe zwei S-Kinder. Sowohl wenn ich O- als auch wenn ich S-Kind bin, sind die bisherigen Reaktionen angemessen. Ich weiß es also nicht und bleibe stehen.

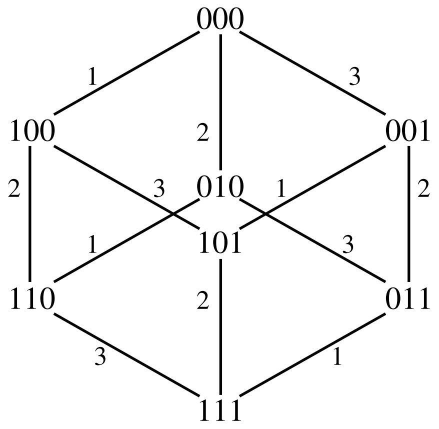
Unmittelbar nach Aufforderung 2:
Die zwei S-Kinder treten vor.

Rätselhaft ist nun an der Wirkung Mitteilung des Vaters nichts mehr, denn wir sehen nun, dass sie

- nicht nur dazu führte, dass alle wissen, das es mindestens ein S-Kind gibt (was ja überflüssig mitzuteilen war, da bereits bekannt)

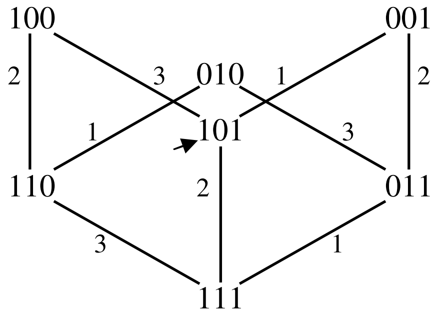
- sondern darüber hinaus dazu führte, dass alle wissen, dass die anderen Geschwister dies wissen, und dieses Wissen(swissen) in ihren Überlegungen verwenden können!

Die Lösung lässt sich auch gut in Kripke-Modellen veranschaulichen, z.B. indem wir die 8 anfangs möglichen Situationen so kennzeichnen, dass „100“ bedeutet: Kind 1 hat Schlamm auf der Stirn, die Kinder 2 und 3 nicht, usw.

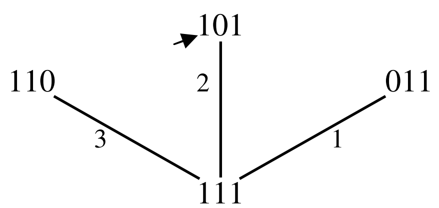


Nehmen wir an, 101 trifft zu.

Nach der ersten Ansage des Vaters scheidet 000 aus, und es bleibt:



Nach der ersten (scheinbar) ergebnislosen Frage scheiden 001, 010 und 100 aus:



Man sieht: Bei zwei schlammigen Kindern wissen die beiden nun jeweils Bescheid! Im Fall 101 unseres Beispiels gibt es für 1 und 3 keine alternativen Situationen. Das saubere Kind weiß übrigens jeweils nicht Bescheid. Von ihm hat der Vater aber auch nichts verlangt.

In der Literatur finden Sie dazu auch Herleitungen mit Tableau, Werkzeugkasten und Axiomatik. Die Herleitung mit der Kripke-Semantik leuchtet aber oft am schnellsten ein.

Übung MML10

Was geschieht bei den Muddy Children, wenn alle drei einen Schlammfleck haben, und warum geschieht dies so?

Übung MML11

Was geschieht beim **Wise Ladies Puzzle** und warum? Das Rätsel lautet so:

Drei weisen Frauen wird gemeinsam angesagt, dass drei rote und zwei weiße Mützen zur Verfügung stehen. Der König setzt jeder von hinten, also für alle außer ihr selbst sichtbar, jeweils eine der Mützen auf. Dann fragt der König die erste, ob sie die Farbe ihrer Mütze weiß, und sie weiß sie nicht. Dann fragt der König die zweite, ob sie die Farbe ihrer Mütze weiß, und sie weiß sie nicht. Dann fragt der König die dritte.

a) Weiß sie nun ihre Farbe?
b) Wenn ja: Wissen Sie die Farbe auch?

Das Rätsel wird oft mit Hüten formuliert. Da man aber gelegentlich den Rand seines Hutes sehen kann, scheinen Mützen realistischer. Außerdem wird es anderswo Wise-Men-Puzzle genannt. Daher soll zum Ausgleich einmal eine weibliche Form verwendet werden.

Lösungen

MML1:

- $\Box_1 (A \to \Diamond_2 B)$
- $\Diamond_1 A \to \Box_2 (\Diamond_1 A \vee \Diamond_1 B)$

MML2:

Nein. Man prüft beide Seiten der Konjunktion:

Gilt in beiden 1-Nachfolgern der Anfangssituation B, wo immer A gilt? JA

Existiert ein 3-Nachfolger der Anfangssituation, in dem ¬B gilt? NEIN!

MML3:

	a	b	c
A	W	F	W
B	F	W	W
A→B	F	W	W
$\Box_1$ (A→B)	W	W	W
¬B	W	F	F
$\Diamond_3$¬B	F	F	F
$\Box_1 (A \to B) \wedge \Diamond_3 \neg B$	$\boxed{\mathbf{F}}$	F	F

Natürlich werden einige Felder für die Antwort nicht benötigt, z.B. ganz offensichtlich b/c in der letzten Zeile. Je nach Formel und Kripke-Interpretation geht es aber evtl. schneller, alle Felder zu berechnen, als vorab genau die benötigten zu bestimmen.

MML4:

1: kontingent, z.B. falsch wenn $z = 1$, richtig, wenn $z = 2$

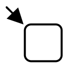
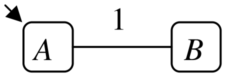
2: unerfüllbar, da hier nach $y := x$ gilt: $y + 1 = z$.

3: allgemeingültig, da die drei Übergänge die Werte von x und y vertauschen

MML5:

1. allgemeingültig
   <u>Argumentation über Kripke-Semantik</u>
   Beides bedeutet, dass in allen i-Nachbar-Situationen A und B gelten.
   <u>Argumentation über Axiome</u>
   Es gelte $\mathsf{K}_i(A \wedge B)$. Wegen Implikationsdistribution und $(A \wedge B) \rightarrow A$ gilt $\mathsf{K}_i A$, und analog gilt $\mathsf{K}_i B$, also ($\mathsf{K}_i A \wedge \mathsf{K}_i B$).

   Gilt dagegen $\mathsf{K}_i A \wedge \mathsf{K}_i B$, dann gilt wegen $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$ gemäß Ax-Schema 3 auch $\mathsf{K}_i(A \wedge B)$.

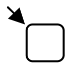
2. kontingent: In  gilt die Aussage trivial, da keine der drei Aussagen $\mathsf{K}_i A$, $\mathsf{K}_i B$, $\mathsf{K}_i(A \vee B)$ gilt. Dagegen gilt $\mathsf{K}_i(A \vee B)$ – aber weder $\mathsf{K}_i A$, noch $\mathsf{K}_i B$ – in
   

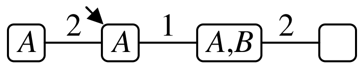
   .

3. unerfüllbar
   <u>Argumentation über Kripke-Semantik</u>
   $\mathsf{K}_i \neg A$ bedeutet, dass in allen i-Nachbar-Situationen A nicht gilt. $\mathsf{P}_i A$ beduetet, dass in mindestens einer i-Nachbar-Situation A gilt. Beides zusammen ist ein Widerspruch.

   <u>Argumentation über Axiome</u>
   $\neg(\mathsf{P}_i A \wedge \mathsf{K}_i \neg A)$ ist zu zeigen, also $\neg \mathsf{P}_i A \vee \neg \mathsf{K}_i \neg A$ d.h. (KPD!) $\neg \mathsf{P}_i A \vee \mathsf{P}_i A$. Und das ist eine AL-Tautologie.

4. kontingent: Gilt in: Gilt nicht in:

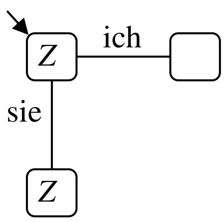
   

MML6:

In allen Situationen, die sie für möglich hält, und es gibt nur diese einzige, gilt Z, also $\mathsf{K}_{sie} Z$. In allen Situationen, die ich für möglich halte, und es gibt nur diese einzige, gilt $\mathsf{K}_{ich} Z$. Dies gilt auch in allen Situationen, die sie für möglich hält: $\mathsf{K}_{sie} \mathsf{K}_{ich} Z$.

MML7:

Meine Frau schaut im Briefkasten nach der Zeitung und geht mit ihr in der Hand zur Haustür. Ich habe nicht aus dem Küchenfenster geschaut, sonst hätte ich sie mit der Zeitung in der Hand sehen können. Ich halte also noch Z und ¬Z für <u>möglich</u>: $\boxed{Z}$–ich–$\boxed{}$. Sie aber hat über multimodale Logik nachgedacht und ganz in Gedanken nicht zum Küchenfenster geschaut und weiß daher nicht, ob ich sie mit der Zeitung in ihrer Hand durch das Küchenfenster gesehen habe. Sie hält dies aber zu Recht für möglich. Sie hält also sowohl die Situation unteres $\boxed{Z}$ für möglich, in der ich <u>weiß</u>, dass die Zeitung da ist, als auch die Situation oberes $\boxed{Z}$, in der ich <u>nicht weiß</u>, ob die Zeitung da ist



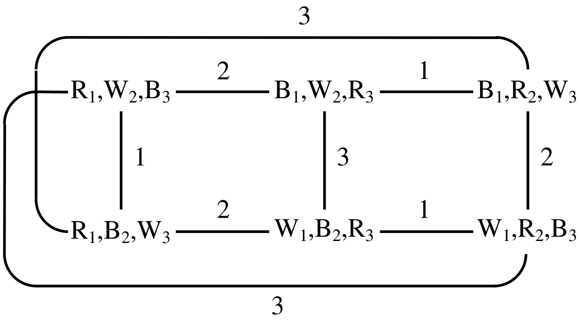
MML8:

Siehe Bild 1 im Text.

MML9:

a) In beiden Situationen hat P2 die weiße Karte, weiß also, dass P1 die rote und P3 die blaue Karte oder P1 die blaue und P3 rote Karte hat.

b)



c) Z.B. so:

$$R_1 \wedge \ [\ (R_1 \wedge \neg B_1 \wedge \neg W_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg R_3) \vee (B_1 \wedge \ldots) \vee (W_1 \wedge \ldots)\ ]$$
$$\wedge \ [\ (R_2 \wedge \neg B_2 \wedge \neg W_2 \wedge \neg R_1 \wedge \neg R_3) \vee (B_1 \wedge \ldots) \vee (W_2 \wedge \ldots)\ ]$$
$$\wedge \ [\ (R_3 \wedge \neg B_3 \wedge \neg W_3 \wedge \neg R_1 \wedge \neg R_2) \vee (B_3 \wedge \ldots) \vee (W_3 \wedge \ldots)\ ]$$

MML10:

Nach der dritten Aufforderung des Vaters treten alle drei vor.

Grund: Bei genau *einem* Schlammfleck würde das eine S-Kind nach der ersten Aufforderung vortreten (wie im Text begründet). Bei genau *zwei* Schlammflecken würden beide S-Kinder nach der zweiten Aufforderung vortreten (wie im Text begründet). Also müssen es nach zwei vergeblichen Aufforderungen drei S-Kinder sein.

MML11:

a) Ja.
b) Ja: rot.

Grund: Sähe die erste gefragte Weise, W1, dass W2 und W3 weiß tragen, wüsste sie, dass sie selbst rot trägt. Nachdem sie dies nun nicht weiß, wissen dann alle drei, dass W2 rot trägt oder W3 rot trägt. Sähe W2 nun weiß bei W3, müsste sie daher selbst rot tragen. Da sie dies aber auch nicht weiß, bleibt nur noch, dass W2 bei W3 rot sieht.

Literatur

- Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Moshe Y. Vardi: *Reasoning about Knowledge*, MIT Press, 1995
- Michael Huth, Mark Ryan: *Logic in Computer Science*, Cambridge University Press, 2013.
- Hans van Ditmarsch: *Dynamic Epistemic Logic* Springer, 2008
- Johan van Benthem, Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, Jan Jaspars: *Logic in Action*, www.logicinaction.org/

Typische Aufgabenstellungen

- Für eine informell gegebene „Spielregel“ (Situationsgeflecht) eine passende Kripke-Struktur finden. (Welche Situationen gibt es. Wie laufen die *i*-Unsicherheits-Kanten. Eventuell: Welche Anfangssituation liegt vor?)
- Für eine gegebene Kripke-Interpretation untersuchen, ob gegebene Formeln gelten.
- Für eine gegebene Kripke-Struktur untersuchen, in welchen (Anfangs-)Stuationen gegebene Formeln gelten bzw. nicht gelten.
- Für eine gegebene Formel eine Kripke-Struktur suchen, in der die Formel gilt bzw. nicht gilt.
- Für jede von zwei gegebenen nicht-äquivalenten Formeln eine Kripke-Interpretation finden, in der die eine Formel gilt und die andere nicht.
- Formeln für natürlichsprachlich geschriebene Sachverhalte schreiben.
- Epistemische Rätsel lösen und ggf. die Lösung formal bzw. informell begründen.