Vorlesungs- und Ergänzungs-* ($\boxed{\text{E}}$) Aufgaben Logik
PVL-verwendbare Aufgaben sind blau gefärbt. Rote Nummer: gleich in der Vorlesung.

$\boxed{\text{Wiederholung Mengenlehre}}$

1. Teilmengen, Mengenoperationen, Abbildungen

Seien Teilmengen der natürlichen Zahlen wie folgt definiert:

$A := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C := \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$D := \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $E := \{8n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
   i. $A \subseteq C$ ii. $E \subseteq C$ iii. $B \subseteq D$ iv. $E \subseteq D$
   v. $D = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ (auch: „$A \cdot B$“ geschrieben) vi. $E = A \cap C$
   vii. $E \times D \subseteq A \times B$ viii. $A \cup B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
b) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
   i. $A \cap B$ ii. $C \cap E$ iii. $B \cup D$ iv. $B \setminus D$ v. $C \times D$

2. Relationen, Abbildungen

a) Sei $f : S \to T$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die durch auf S definierte Relation $\approx$ mit $x \approx y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Welche der folgenden Aussagen sind (bezüglich der Abbildungsgraphenmengen) mit A, B, C, D wie in Aufg. 1 richtig, welche falsch – und warum?
   i. $D^C \subseteq A^C$ ii. $C^D \subseteq A^B$ iii. $C^A \subseteq C^D$

$\boxed{\text{E1}}$ Äquivalenzrelationen

Zeigen Sie, dass *jede* Äquivalenzrelation auf einer Menge S mittels einer geeigneten Abbildung f wie in (2a) dargestellt werden kann.
Tipp: Verwenden Sie die durch $\approx$ definierte Partition in Äquivalenzklassen.

3. Bildmenge

Bildmengen $f[A]$ werden häufig auch als $f(A)$ geschrieben. Zeigen Sie anhand einer Abbildung auf $\{1, \{1\}\}$, dass dies zu inakzeptablen Mehrdeutigkeiten führt.

4. Abbildungen

a) Geben Sie alle möglichen Funktionen von {1,2} nach {a,b,c} an.
b) Geben Sie alle möglichen Funktionen von {1,2,3} nach {a,b} an.
c) Welche von ihnen sind
   i. injektiv? ii. surjektiv? iii. bijektiv?

$\boxed{\text{E2}}$ Mengenoperationen

Ein fleißiger Informatiker hat 29 Artikel veröffentlicht, und zwar u.a. zu den Themen Logik (L = Menge seiner Artikel zum Thema Logik), Petri-Netze (P) und Verteilte Systeme (V). Er gibt in einer Bewerbung seine 29 Artikel an und erwähnt, dass

$|L| = 9$, $|P| = 15$, $|V| = 16$, $|L \cap P| = 5$, $|L \cap V| = 4$,

$|P \cap V| = 8$, $|L \cap P \cap V| = 2$.

($|M|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in der Menge M.)
Sein zukünftiger Arbeitgeber möchte gerne wissen:

a) Wie viele der Artikel beschäftigen sich mit genau einem der drei Gebiete?
b) Wie viele der Artikel handeln nicht von Logik?
c) Wie viele der Artikel handeln weder von Logik noch von Petri-Netzen noch von verteilten Systemen?

Was ist jeweils die Antwort (bzw. wo muss er nochmal Weiteres nachfragen)?

*) **Ergänzungsaufgaben** sind Anregungen zur freiwilligen vertiefenden Weiterarbeit, grenzen teilweise an kleine Projekte und werden in V/Ü nicht behandelt.

Wiederholung Induktion, Rekursion

5. Induktive Mengendefinition

Definieren Sie induktiv über dem Alphabet $Alph=\{a,b\}$

a) die Sprache aller Wörter, die eine ungerade Anzahl von Buchstaben enthalten,
b) die Sprache aller Palindrome, d.h. der Wörter, die sich rückwärts wie vorwärts lesen,
c) die Sprache aller doppelten Wörter ww.

6. Induktiver Beweis und rekursive Funktionsdefinition

a) Beweisen Sie $1+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

b) Wenn wir die Addition noch gar nicht kennen, sondern (für jedes m) $m+n$ als einstellige Funktion „$m^+(n)$" rekursiv für das Argument n so definieren:

$m+0$ bzw. $m^+(0)$ $:= m,$

$m+succ(n)$ bzw. $m^+(succ(n))$ $:= succ(m+n)$ bzw. $succ(m^+(n)),$

wie können wir dann die Assoziativität $l+(m+n)=(l+m)+n$ beweisen?

c) Beweisen Sie für die Länge und Verkettung von Wörtern über Σ: $l(v\circ w)=l(v)+l(w)$.

Tipp:
1. Σ^* induktiv: $\varepsilon\in\Sigma^*$, $w\in\Sigma^*\wedge a\in\Sigma\rightarrow wa\in\Sigma^*$
2. $\circ$ bzw. $v\circ$ rekursiv: Für alle $v,w\in\Sigma^*, a\in\Sigma$ ist $v\circ\varepsilon:=v$ und $v\circ wa:=(v\circ w)a.$

d) Mathematikerin Martha und ihre Freundin Bertha:

M: Die Männer sind doch alle gleich!
B: Irgendwie schon.
M: Das kann ich sogar mathematisch beweisen: Alle Männer sind identisch.
B: Nee, ernsthaft?
M:
1. Nimm mal n=1, also einen Mann M_1: In der Menge $\{M_1\}$ sind alle identisch.
2. Nimm nun an, das gilt für alle Mengen von jeweils n Männern,
3. und stelle Dir eine Menge $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\}$ von $n+1$ Männern vor.
4. Wenn Du den ersten oder den letzten rausschickst, hast Du jeweils eine Menge von n (wegen (2) identischen) Männern, $\{M_2, \ldots, M_{n+1}\}$ bzw. $\{M_1, \ldots, M_n\}$,
5. also jeweils alle identisch mit M_2.
6. Also sind, da „=" transitiv ist, alle $n+1$ Männer in $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\}$ identisch.
7. Also sind per Induktion alle in der endlichen Menge aller Männer identisch.
8. Das nennt man „vollständige Induktion", einen induktiven Beweis auf der induktiv definierten Menge der natürlichen Zahlen.

B: Einerseits ist für mich der Erwin der einzige Mann in meinem Leben, insofern stimmt deine Aussage fast. Aber dein Beweis ist nicht ganz korrekt. Immerhin, das muss ich Dir lassen: Es ist nur ein einziger deiner acht Schritte ausgesprochen falsch, nämlich …

Welcher und warum?

7. Grammatiken

Geben Sie eine Grammatik für die Palindrome über $\{a,b\}$ an.

$\boxed{E3}$ Induktive Mengendefinition mittels Grammatik

Geben Sie für jede der beiden anderen Sprachen in Übung 5 eine Grammatik an.
(c) ist nicht ganz einfach.

$\boxed{\text{Wiederholung Graphen}}$

$\boxed{\text{E4}}$ Graphen, induktive Definitionen und Äquivalenzrelationen

Ein *Pfad* von einem Knoten *a* zu einem Knoten *b* eines gerichteten Graphen *G* ist eine Folge $(x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n)$ von Kanten von *G* mit $x_1 = a$ und $x_n = b$, bzw. die leere Kantenfolge ε, wenn *a*=*b*. Zwei Knoten *a* und *b* in *G* heißen *stark verbunden*, wenn in *G* sowohl ein Pfad von *a* nach *b* als auch einer von *b* nach *a* existiert.

a. Definieren Sie Pfade induktiv.
b. Zeigen Sie, dass die starke Verbundenheit eine Äquivalenzrelation auf der Knotenmenge des Graphen *G* ist.

8. Baumdefinitionen

Manche Autoren definieren endlich verzweigte geordnete Bäume als Teilmengen von $I\!N^*$ (Sprache über $I\!N$), indem sie jeden Knoten mit einer Pfadbeschreibung (im Stile von „und jetzt zum wievielten Kind?“) identifizieren. Geben Sie eine Definition der passenden Sprachen (jeweilige Menge aller Pfadbeschreibungen) an.

$\boxed{\text{E5}}$ Königs Lemma

Zeigen Sie unter Verwendung von Königs Lemma (KL), dass sich das Solitairespiel aus der Vorlesung nicht unendlich lange spielen lässt.

Tipps:

(i) Formen Sie KL durch Kontraposition um in KL’: Ein Baum mit Knoten ausschließlich endlichen Grades ohne $\boxed{\text{...(selbst überlegen)...}}$ hat nur endlich viele Knoten.

(ii) Ordnen Sie dem Spielablauf eine Baumstruktur zu und wenden Sie KL’ an.

$\boxed{\text{AL-Formeln, Wahrheitswerte, Wahrheitstabellen}}$

9. Alternative Schreibweisen

Beschreiben Sie, wie sich die (a) Infix-, (b) polnische und (c) umgekehrt polnische Schreibweise einer aussagenlogischen Formel aus der Baumdarstellung ergeben.

10. Rekursive Funktionen auf Formeln

Definieren Sie „vernünftig“ (a) $Sub(\varphi)$, (b) $Grad(\varphi)$ und (c) $Tiefe(\varphi)$.

11. Wahrheitswert, rekursiv

a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum der Formel $(A \to B) \lor (A \land (B \leftrightarrow C))$.
b) Schreiben Sie an alle Knoten dieses Syntaxbaumes den zugehörigen Wahrheitswert unter der Belegung $A \mapsto \text{W}, B \mapsto \text{F}, C \mapsto \text{F}$.

12. Junktoren in natürlicher Sprache

Schreiben Sie die folgenden Sätze jeweils sinn- und möglichst textgetreu als eine AL-„Formel“, in der Sätze natürlicher Sprache mit Junktoren verbunden sind. Ignorieren Sie dabei wertende Beiklänge.

Beispiel:

Franz und Nadia sind Studenten. $\mapsto$ (Franz ist Student) $\land$ (Nadia ist Studentin)

a) Wenn du fährst, fahre ich auch.
b) Ich fahre nur wenn du auch fährst.
c) Weil du fährst, fahren er und ich auch.
d) Ich fahre nicht, es sei denn, du fährst auch.
e) Es regnet morgen, vielleicht aber auch erst übermorgen.
f) Linda arbeitet, obwohl sie krank ist.
g) Tim ist ein guter Tänzer und Schwimmer.
h) Wenn Franz singt, dann nervt er.
i) Wenn Franz singt, dann nervt das.

13. Wahrheitswerteverlauf, Wahrheitstafel

a) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \to B) \vee (\neg B \wedge A)$.

b) Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $((A \to B) \to C) \wedge \neg(B \vee C)$.

14. Andere Junktoren, Wahrheitstafel

Berechnen Sie den Wahrheitswerteverlauf von $(A \uparrow (B \to (A \downarrow (B \leftarrow A))))$.

15. Junktoren und Operatoren

a) Geben Sie die 4 einstelligen logischen Operatoren(semantiken) an.

b) Gibt es nullstellige?

c) Schreiben Sie eine Wahrheitstafel für if-then-else.

$\boxed{\text{E6}}$ Redundante Argumente

Wie viele der n-stelligen Junktoren (Werteverläufe) hängen echt von allen n Argumenten ab (und wie formalisiert man diese Abhängigkeit?) [Beantworten Sie zunächst die Frage in Klammern.]
Die allgemeine Anzahl als Funktion von n ist für kleine n zu bestimmen. Eine geschlossene Formel ist nicht leicht zu finden. Wer sie rät, kann sie evtl. leicht induktiv beweisen.

$\boxed{\text{Semantische Begriffe}}$

16. Semantische Kategorien von Formeln

Welche der folgenden Formeln sind ...

	erfüllbar	unerfüllb.	konting.	allgemeing.	widerlegb.?
a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$					
b) $(A \vee B) \to (A \to B)$					
c) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \to B)$					

Geben Sie im Falle der Kontingenz jeweils ein Modell bzw. Gegenbeispiel an, und geben Sie im Falle der Allgemeingültigkeit bzw. Unerfüllbarkeit eine Begründung.

17. Tautologien und Wahrheitstafeln

a) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Distributivität von *oder* über *und*, d.h. dass $((P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ eine Tautologie ist.

b) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die Implikationsauflösung, d.h. dass $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ eine Tautologie ist.

18. Kombinatorische Aufgaben – Grenzfälle

a)
Anne sagt: Bea und Chris werden als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Anne hat gerade gelogen.
Chris sagt dann: Anne hat gerade die Wahrheit gesagt.
Wer hat gelogen, wer nicht?

b)
Anne sagt: Bea wird als Nächstes lügen.
Bea sagt dann: Chris wird als Nächstes lügen.
Chris sagt dann: Anne hat gerade gelogen.
Wer hat gelogen, wer nicht?
Was geht jetzt schief? Ist die Aufgabe gut gestellt? Ist es nicht so, dass jeder jeweils entweder gelogen oder die Wahrheit gesagt haben muss?

c)
Anne sagt: Ich sage gerade die Wahrheit.
Hat sie gelogen oder nicht? Ist die Aufgabe gut gestellt?

d) Ist überhaupt Aufgabe (a) gut gestellt?

Vorlesungs- und Ergänzungs-* ($\boxed{\text{E}}$) Aufgaben Logik
PVL-verwendbare Aufgaben sind blau gefärbt. Rote Nummer: gleich in der Vorlesung.

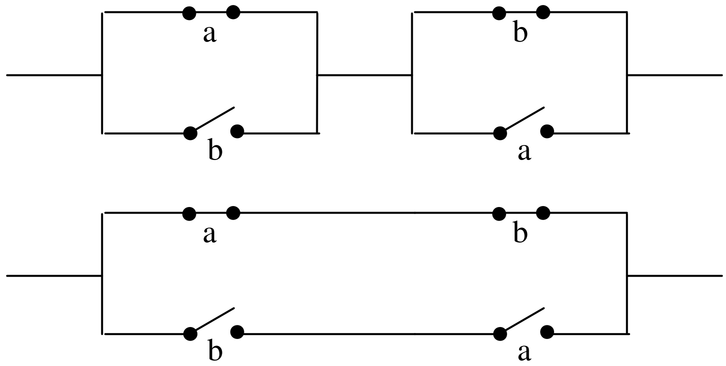
$\boxed{\text{E7}}$ Wahrheitstafel, Modelle einer Formelmenge

a) Finden Sie im Kriminalbeispiel auf Skriptseite 7 für Bollermann den Täter heraus.
b) Benutzen Sie dazu eine 16-zeilige Wahrheitstafel? Wenn nein: warum nicht?

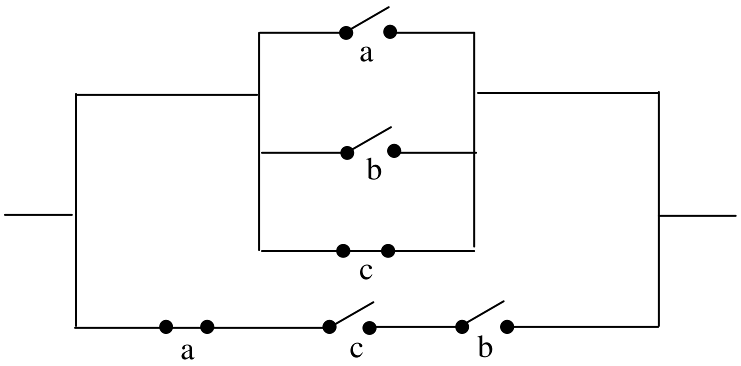
$\boxed{\text{Syntax/Semantik}}$

19. Boolesche Schaltwerke

a) Vergleichen Sie die beiden folgenden Schaltwerke. Berechnen Sie dazu deren Formeldarstellungen, und zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln und/oder Tautologien, dass sie bei den gleichen Schalterstellungen leiten.



b) Berechnen Sie die mittels Formeldarstellung und Wahrheitstafel alle Schalterstellungs-Kombinationen, bei denen das folgende Schaltwerk leitend verbindet. Versuchen Sie es daraufhin zu vereinfachen.



20. Substitution

Zeigen Sie, in welchem Sinne durch den Substitutionssatz die Variablen P, Q, … für beliebige Aussagevariablen A_i überflüssig werden – z.B. in $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

21. Substitution – (Gegen-)Beispiele

a) Geben Sie eine passende widerlegbare AL-Formel und eine Substitution an, so dass die Formel durch die Substitution in eine Tautologie überführt wird.
b) Geben Sie eine AL-Formel und eine Substitution für A und eine Substitution für B an, derart dass beide Hintereinanderausführungen der Substitutionen und deren gleichzeitige Ausführung drei Formeln ergeben, von denen keine zwei äquivalent sind.

PVL-verwendbare Aufgaben sind blau gefärbt. Rote Nummer: gleich in der Vorlesung.

22. Substitution – Hintereinanderausführung

Zeigen Sie: Jede gleichzeitige Substitution an einer Formel ist eine Hintereinanderausführung von Einzelsubstitutionen $[A_i / \varphi_i]$.

Vorsicht: Man kann dazu nicht einfach die gleichzeitigen Ersetzungen der einzelnen Aussagevariablen hintereinanderschalten (Warum?).

Tipp: Wie vertauscht man in einem Programm die Werte von a und b?

$\boxed{\text{E8}}$ Substitutionen hintereinander

Die Hintereinanderausführung zweier Substitutionen ist wieder eine (gleichzeitige) Substitution – welche?

23. Ersetzungen

Leiten Sie mittels Ersetzungs- und Äquivalenzsatz aus bekannten Tautologien ab, dass gilt:
$P \to Q \quad \equiv \quad \neg(Q \wedge Q) \to \neg(P \vee \bot)$.

24. Junktorenbasen

a) Suchen Sie über den Basen $\{\neg, \wedge, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils eine möglichst einfache Formel für $P \to (\neg Q \to \neg P)$.

b) Verwenden Sie den Satz „Von Junktorenbasen zu Junktorenbasen“, um zu zeigen, dass $\{\neg, \to\}$ eine Junktorenbasis ist, und suchen Sie über der Basis eine möglichst einfache Formel für $P \wedge Q$ und für $P \vee Q$.

Bei Variation für PVL: Verwenden Sie „exotische Junktoren“ und eine minimale Junktorenbasis, d.h. dass man keinen ihrer Junktoren weglassen könnte. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *ist z.B. weder exotisch noch minimal.*

25. ITE-Form erzeugen

Wandeln Sie die Formel $(B \to A) \wedge (A \vee B)$ in ITE-Form um –

a) durch Auswertung mittels Wahrheitstafel und anschließende Formelsynthese,

b) durch Shannon-Expansionen zuerst nach *A* und dann nach *B*, dann Konstanten-Berechnung an den „Blättern“,

c) durch Shannon-Expansionen zuerst nach *B* und dann nach *A*, dann Konstanten-Berechnung an den „Blättern“,

d) indem Sie die drei Junktoren durch ITE ersetzen.

e) Wie kann man in den Ergebnissen die Konstanten $\top$ und $\bot$ durch ITE und $\neg$ ersetzen?

26. Folgerungen aus Formelmengen

Welche der folgenden Folgerungen sind korrekt? Belegen Sie Ihre Antwort mit Wahrheitstafeln.

a) $\{A \vee B,\, B \to A\} \models A$

b) $\{(A \vee B) \to A,\, A \to (A \vee B)\} \models \neg(A \wedge \neg B)$

27. Konjunktive Normalform verwenden

Welche der folgenden KNF-Formeln sind allgemeingültig?

a) $(B \vee C \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee C \vee A)$

b) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\,\}\}_{KNF}$

c) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\neg C, C\}, \{\neg B, B, C\}\}_{KNF}$

28. Konjunktive Normalform erzeugen

a) Verwandeln Sie $\neg(A \to (B \vee C))$ in eine KNF-Formel,
b) verwandeln Sie $(A \leftrightarrow B) \to C$ in eine KNF-Formel,

beide mittels

i. Synthese aus Wahrheitstafel (KNF1),
ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, KNF2).

29. KNF-Umformung und Resolution anwenden

a) Formen Sie $\neg\big((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))\big)$ in KNF um.
Begründen und verwenden Sie bei Bedarf das KNF2-„Makro“ $\neg(P \to Q)$ ➔ $P \wedge \neg Q$
b) Entscheiden Sie mittels Resolution, ob $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$ allgemeingültig ist. Verwenden Sie Teil (a).

30. Disjunktive Normalform verwenden

Welche der folgenden DNF-Formeln sind erfüllbar, welche sind unerfüllbar, welche allgemeingültig?

a) $(B \wedge C \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge C \wedge A)$
b) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\}\}_{DNF}$
c) $\{\{A, B, \neg A\}, \{\neg C, C\}, \{\neg B, C\}\}_{DNF}$

31. Disjunktive Normalform erzeugen

a) Verwandeln Sie $\neg(A \to (B \vee C))$ in eine DNF-Formel,
b) verwandeln Sie $(A \leftrightarrow B) \to C$ in eine DNF-Formel,

beide mittels

i. Synthese aus Wahrheitstafel (DNF1),
ii. Formel-Umbau (syntaktische Umformung, DNF2).

32. Tableaux

a) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $A \to (C \vee \neg A)$, geben Sie eine äquivalente DNF-Formel und alle Modelle (über A und C) an. Wo hätten Sie aufhören können, wenn Sie nur die Erfüllbarkeit hätten prüfen wollen?
b) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $(A \wedge \neg B) \to (B \to (A \vee C))$.
c) Zeichnen Sie einen Tableau-Baum für $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (B \to (A \vee C))$.

33. Tableaux

a) Geben Sie eine Formel an, die genau unter den gleichen Belegungen gilt wie alle drei Formeln in $\{A \to B, \neg C \to \neg B, \neg C \vee A\}$ gleichzeitig.
b) Verwenden Sie das Tableauverfahren, um die Erfüllbarkeit der Formelmenge $\{A \to B, \neg C \to \neg B, \neg C \vee A\}$ zu beweisen.
c) „Verallgemeinern“ Sie das Tableauverfahren auf endliche Formelmengen anstelle einer Formel so, dass Sie gegenüber (a) eine Ebene im Baum einsparen.

$\boxed{\text{E9}}$ Tableau, Erweiterungen

Verwenden Sie eine eigene Tableau-Variante, um (mit 6 und nicht 12 Aussagevariablen) folgende Denksportaufgabe zu lösen:

> *Jede der genannten Personen wohnt entweder in Berlin oder in Kiel:*
> **DAVID** oder **IRIS** oder beide leben in **KIEL**.
> **HORST** oder **JUTTA** oder beide wohnen in **BERLIN**.
> **ANJA** hat ihre Wohnung in **KIEL** oder **OTTO** seine in **BERLIN**, oder es trifft beides zu.
> Wenn **ANJAS** Domizil in **BERLIN** ist, dann ist **IRIS** ebenfalls in **BERLIN** ansässig.
> Wenn **JUTTA** in **KIEL** wohnt, dann lebt auch **OTTO** dort.
> Wenn **ANJA** in **KIEL** wohnt, dann hat **JUTTA** den gleichen Wohnsitz.
> Wenn **DAVID** in **BERLIN** wohnt, dann gilt dies auch für **OTTO**.
> **DAVID** und **HORST** leben in derselben Stadt.
> *Wer wohnt wo?*

34. Prolog, Markierungsalgorithmus

Beweisen Sie mit dem Markierungsalgorithmus die Gültigkeit der Aussage

„Wenn ich Zeit habe, gehe ich einen Kaffee trinken."

unter der Annahme der folgenden Wissensbasis:
Wenn ich Sicherheit bekomme, schreibe ich eine gute Klausur. Wenn ich mir Mühe gebe, dann bearbeite ich die Aufgaben und lese im Skript. Wenn ich Zeit habe, gebe ich mir Mühe. Wenn ich im Skript lese, kann ich die Aufgaben lösen. Wenn ich eine gute Klausur schreibe, gehe ich einen Kaffee trinken. Wenn ich die Aufgaben bearbeite und sie lösen kann, bekomme ich Sicherheit.
Tipp: Regeln s.o. – Fakt: Ich habe Zeit – Ziel: Ich gehe Kaffee trinken

35. Binary Decision Diagram

Bestimmen Sie über (z.B. eine ITE-Form und) eine OBDD-Darstellung und anschließende Reduktion einen ROBDD für $(B \to A) \wedge (A \vee B)$.

Lesen Sie aus dem ROBDD eine zu der ursprünglichen Formel äquivalente aber kürzere Formel heraus.

36. AL-Kalküle

Ergänzen Sie im folgenden Beweis (im Mendelson-Kalkül) von $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$ die „Begründungen", d.h.

- „Gegeben " oder
- „Axiom" oder
- Regel (MP) oder Substitution + Formel-Nummern ihrer Prämissen.

1.	$A \to B$	....
2.	$B \to C$	....
3.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	....
4.	$A \to (B \to A)$	....
5.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(4), ...
6.	$A \to (B \to C)$	....
7.	$(A \to B) \to (A \to C)$	....
8.	$A \to C$	....

37. Werkzeugkasten redundant

Zeigen Sie, dass die Regelmenge des Werkzeugkastens nicht minimal ist:

a) Beweisen Sie mit dem Werkzeugkasten $A \to A$, ohne Prämissen oder die Wiederholungsregel zu verwenden.
b) Wie erhält man daraus $\varphi \vDash \varphi$, also die Wiederholungsregel?

38. und $\boxed{\text{E10}}$: Werkzeugkasten

Leiten Sie Nr. (a) und (i) der folgenden „Kleene-Axiome“ als Tautologien her. Der Rest sind empfohlene Ergänzungsaufgaben.

a) $A \to (B \to A)$
b) $(A \wedge B) \to A$
c) $(A \wedge B) \to B$
d) $B \to (A \vee B)$
e) $A \to (A \vee B)$
f) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
g) $(A \to (B \to (A \wedge B))$
h) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
i) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
j) $\neg\neg A \to A$

39. und $\boxed{\text{E11}}$: Werkzeugkasten

Leiten Sie Nr. (c) der folgenden Folgerungen ab. Der Rest sind empfohlene Ergänzungsaufgaben.

a) $\neg(A \wedge \neg B) \vDash A \to B$
b) $(\neg A \to B) \vDash A \vee B$
c) $\{ \neg A \vee B, \neg B, A \vee C \} \vDash C$
d) $(A \to B) \to (A \to C) \vDash (A \wedge B) \to C$
e) $\{ A \wedge B, A \to (C \wedge D) \} \vDash B \wedge D$
f) $A \vDash A \wedge (A \vee B)$

$\boxed{\text{E12}}$ Oder-Benutzung und Resolution

Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen

- der Regel OB_2 des Werkzeugkastens: $\{A \vee B, A \to C, B \to C) \} \vDash C$ und
- der Resolutionsregel $\{A \vee D, \neg A \vee E \} \vDash D \vee E$.

Genauer:

a) Leiten Sie die Resolutionsregel aus der Regel OB_2 des Werkzeugkastens ab ...
b) … und umgekehrt.

Verwenden dürfen Sie dabei einfachere Folgerungen, Tautologien, Äquivalenzen und Substitution, wie

$\vDash A \vee \neg A$, $\quad A \to B \equiv \neg A \vee B$, $\quad \vDash A \to A \vee B$, $\quad \{A \to B, B \to C\} \vDash A \to C$,

sowie das Deduktionstheorem.

$\boxed{\text{E13}}$ Craigs Interpolationssatz

Es seien $\varphi = \neg(A \wedge B) \to (\neg C \wedge B)$ und $\psi = (D \to A) \vee (D \to \neg C)$.

c) Verwenden Sie $\neg P \to Q \equiv P \vee Q$ und ein Distributivgesetz, um eine möglichst kurze KNF für φ zu finden.
d) Verwenden Sie (a) und $(P \vee Q) \wedge S \vDash (R \to P) \vee (R \to Q)$, um $\varphi \vDash \psi$ zu beweisen.
e) Identifizieren Sie ein interpolierendes π für die Folgerung $\varphi \vDash \psi$.

$\boxed{\text{E14}}$ ML-Formeln und Modelle

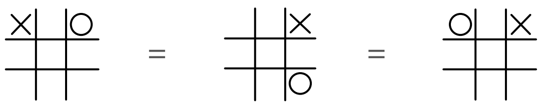
In einer Tic-Tac-Toe-Variante TTTV werden abwechselnd von SpielerIn U Kreuze und von SpielerIn I Kreise in die noch freien Felder eines anfangs leeren 3x3-Spielfeldes gesetzt.
U beginnt. Das Spiel ist beendet,

- sobald I oder U sein/ihr Zeichen in drei Felder auf einer Geraden (also Zeile, Spalte oder Diagonale) gesetzt (und dadurch gewonnen) hat, oder
- wenn kein Feld mehr frei ist.

Verloren hat, wer nicht mehr ziehen darf bzw. kann.

a) Stellen Sie folgende Teile einer Kripke-Interpretation (mit Anf.) für das Spiel TTTV graphisch dar:
   - die Anfangssituation plus alle in einem Zug sowie fünf in zwei Zügen erreichbare Situationen,
   - eine Endsituation mangels freier Felder plus alle (um 1 Zug) vorangehenden Situationen,
   - eine Endsituation wegen erreichter geradliniger Gewinnkonstellation plus alle (um 1 Zug) vorangehenden Situationen.

   (jeweils einschließlich Erreichbarkeitspfeilen für Züge zwischen diesen Situationen)
   Identifizieren Sie dabei Stellungen, die sich nur um Drehung oder Spiegelung voneinander unterscheiden, und stellen Sie jeweils nur eine davon dar:

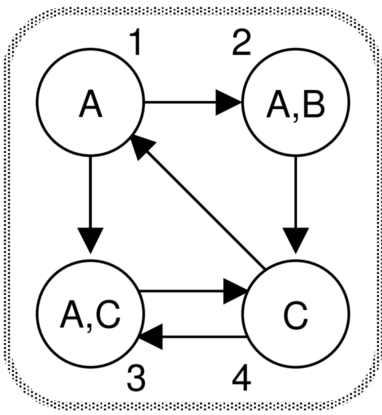


b) Schreiben Sie je eine ML-Formel – und jeweils 1 TTTV-Situation, für die die Formel gilt – für …
   - Dies ist eine Endsituation.
   - Der Spieler am Zug muss mit dem nächsten Zug gewinnen.
   - Der Spieler am Zug kann, muss aber nicht, mit dem nächsten Zug gewinnen.
   - Der Spieler am Zug kann den nächsten Zug so setzen, dass er mit seinem übernächsten Zug gewinnen kann, egal wie der Gegner dazwischen zieht.

40. Gültigkeit von ML-Formeln in Kripke-Strukturen

Im Kripke-Rahmen und der Belegung wie rechts, mit welchen Knoten als Anfangssituation gilt die Formel

$\Diamond\Box A \wedge \Box\Diamond(A \wedge \neg C)$?



PVL-verwendbare Aufgaben sind blau gefärbt. Rote Nummer: gleich in der Vorlesung.

41. ML-Rahmeneigenschaften und Axiome

a) Welche Rahmen werden durch das ML-Axiom $\Diamond A \rightarrow \Box A$ gekennzeichnet?

b) Wir nennen einen ML-Rahmen *Rah*=(*K*,*R*) **euklidisch**, wenn $\forall u,v,w \in K : ((wRu \wedge wRv) \rightarrow uRv)$. Geben sie eine ML-Formel φ an, für die gilt: Genau dann ist ein ML-Rahmen euklidisch, wenn φ Axiom ist, d.h. wenn für jeden Anfangsknoten *Anf* und jede *K*-Belegung *Bel* jede Substitution von φ in (*Rah*,*Bel*,*Anf*) gilt.

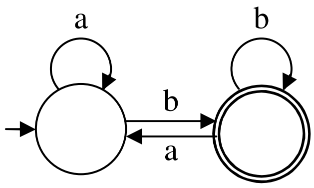
c) Welche Rahmen werden durch das ML-Axiom $\neg(\Diamond A \wedge \Diamond \neg A)$ gekennzeichnet?
Tipp (c): Zusammenhänge zwischen $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ verwenden.

42. Zusammenhänge zwischen Temporaloperatoren

Drücken Sie die zusätzlichen Temporaloperatoren R,W, Op1, Op2 und Op3 möglichst einfach (mittels AL-Junktoren) durch die Standardoperatoren aus – und umgekehrt die Standardoperatoren (außer X) durch die zusätzlichen.

43. PLTL-Formeln, Büchi-Automaten und ω-reguläre Ausdrücke

a) Bestimmen Sie zu folgendem Büchi-Automaten



(i) eine PLTL-Formel (Situationen einelementig)
(ii) einen ω-regulären Ausdruck
„mit denselben Sprachen“ – beide jeweils möglichst kurz.

b) Bestimmen Sie zu dem ω-regulären Ausdruck a*b(a|b)ω
(i) einen Büchi-Automaten
(ii) eine PLTL-Formel (Situationen einelementig)
„mit denselben Sprachen“ – beide jeweils möglichst kurz/einfach.

c) Bestimmen Sie zu der PLTL-Formel $B \wedge G[A \wedge (B \rightarrow X\neg B) \wedge (\neg B \rightarrow XB)] \wedge FC$ über den AL-Variablen A,B, C
(i) einen Büchi-Automaten
(ii) einen ω-regulären Ausdruck
„mit denselben Sprachen“ – beide jeweils möglichst kurz/einfach.

44. PL1 in natürlicher Sprache

„Formalisieren“ sie die folgenden Aussagen:

a) Nico und Björn sind Studenten.
b) Nico und Björn sind Freunde.
c) Nico ist kleiner als Björn und größer als Erika.
d) Erika sitzt zwischen Nico und Björn.
e) Jeder mag seine (eventuellen) Tischnachbarn.
f) Jeder mag seinen Tischnachbarn. [Achtung!]
g) Jeder kennt jemanden, der ihn mag.
h) Jeder kennt jemanden, der jemanden mag.
i) Jeder der nur will kann es schaffen.
j) Ein ganz Schlauer hat alle gestern gekauften Kekse aufgegessen.

E15 Epistemische Logik (Wissenslogik) evtl. auch erst nach Prädikatenlogik

Betrachten Sie folgende Aussagen:
"Reports that say that something hasn't happened are always interesting to me, because as we know, there are known knowns; (A) there are things we know we know. We also know there are known unknowns; that is to say (B) we know there are some things we do not know. But (C) there are also unknown unknowns -- the ones we don't know we don't know." And this:
(E) "the absence of evidence is not evidence of absence."
http://en.wikiquote.org/wiki/Donald_Rumsfeld
(F) „Wir wissen dass wir nichts wissen.“ –
angelehnt an „οιδα ουδεν ειδως“ („Ich weiß dass ich nichts weiß,“ Sokrates zugeschrieben, http://de.wikipedia.org/wiki/Ich_weiß ...)

Entwerfen Sie eine minimale zum Obigen passende Wissenslogik als Modallogik mit Modalitäten + Aussagenlogik + Quantisierung über Informationen. Beantworten Sie insbesondere folgende Fragen:

(1) Wenn $\Box x$ bedeutet „Wir wissen x,“ was bedeutet – kurz und ohne Negation ausgedrückt – dann $\Diamond x$, d.h. $\neg\Box\neg x$?

(2) Mit welcher minimalen „vernünftigen“ Formelsprache könnten wir versuchen, Rumsfelds und Sokrates‘ (modifizierte) Aussagen zu formalisieren? – Definieren Sie sie induktiv.
Tipp: Beantworten Sie vielleicht zuerst (3), der Minimalität wegen.

(3) Wie lauten dann mögliche Formeln für A, B, C, D:=„x beweist y“, E und F oben?

(4) Ist “We don't know that we don't know the secret” gleichbedeutend mit “We don't know if (whether or not) we don't know the secret”? Was könnte das im Zusammenhang mit (3 C) oben und $\Diamond x \equiv \neg\Box\neg x$ bedeuten?

E16 Epistemische Logik – Paradoxon?

Ein Tyrann verurteilt einen aufrührerischen aber ehrlichen Logiker sonntags zum Tode. Er sagt: „Du wirst an einem der folgenden 7 Tage hingerichtet, wirst aber vorher nicht wissen, an welchem Tag. Das garantiere ich Dir feierlich.“ Der Logiker schmunzelt innerlich, denn er sieht sofort, dass das gar nicht geht, so dass der Tyrann ihn am Ende laufen lassen muss:

- Wenn der 7. Tag beginnt, wird er dann wissen, dass es an diesem Tage sein muss, also kann es nicht am 7. Tage passieren, sondern spätestens am 6. Tag.
- Wenn der 6. Tag beginnt, wird er – da der 7. Tag ausscheidet – dann wissen, dass es an diesem Tage sein muss, also kann es nicht am 6. Tage passieren, sondern spätestens am 5. Tag.
- usw. bis einschließlich des morgigen Montags, d.h. es geht gar nicht.

Der Tyrann betritt am Dienstag die Zelle des Logikers und sagt: „Jetzt wirst Du hingerichtet. Gib zu, dass Du nicht gewusst hast, dass das heute geschieht!“ – wozu der ehrliche Logiker nur traurig nicken kann.

Wie kommt dieses Paradoxon zustande?

45. Freie und gebundene Variablen

- Unterstreichen Sie sämtliche freien Variablenvorkommen.
- Zeichnen Sie von jedem gebundenen Variablenvorkommen aus einen Pfeil zu der Quantifizierung, die es bindet.

$\forall x \exists y(R(x,y) \to (P(x) \vee Q(y,x)))$	$\forall x(P(x) \to \forall y Q(x,y))$
$\forall x\, \exists y(R(x,y)) \to (P(x) \vee Q(y,x))$	$\forall x\, P(x) \to \forall y Q(x,y)$
$\forall x(P(x) \to Q(x,y))$	$\forall x(P(x) \to \forall x Q(x,y))$

46. Auswertung von „konstanten PL1-Termen und -Formeln“
Werten Sie in der Struktur A_{Bsp} aus:

a) die Terme $c, f(c)$ und $f(f(f(c)))$;
b) die Formeln $P(f(c), f(c))$, $P(c, f(c))$ und $P(f(c), c) \to P(c,c)$.

47. Auswertung von PL1-Termen und -Formeln mit Variablen (PVL: neue Struktur!)
Werten Sie in der Interpretation (A_{Bsp}, I_V) mit $I_V(x) = I_V(y) = 1$ aus:

a) $P(x,y)$
b) $\exists y P(x,y)$
c) $\forall x \exists y P(x,y)$
d) $\forall x P(x,y)$
e) $\exists y \forall x P(x,y)$

48. Auswertung von geschlossenen Formeln in einer Struktur (PVL: neue Struktur!)
Werten Sie folgende geschlossene Formeln (z.B. „durch bloßes Hinsehen“) in der Struktur A_{Bsp} aus:

a) $\exists x \neg P(x, f(x))$
b) $\forall y((\forall x P(x,y)) \to y = f(y))$ (in $PL1_=$)
c) $\forall x\, P(x, f(x))$
d) $\exists x \forall y P(x,y)$ (Wie lautet ein konstanter Term in der Struktur A_{Bsp} für solch ein x?).

49. Anwendung erster PL1-Theoreme in natürlicher Sprache
Folgende Aussagen sind verbürgt:

a) Sometimes it don't always work. (Casey Stengel, Baseballmanager, 1890-1975)
b) Immer putzt Du Dir nie die Füße ab! (zahlreiche Mütter, seit Erfindung der Fußmatte)

(i) Formalisieren Sie jeweils die Aussage als PL1_Formel über einem Universum der entsprechenden „Gelegenheiten“, evtl. auch Personen und Körperteilen.
(ii) Was ist dabei eine geeignete potentielle Eigenschaft der Objekte?
(iii) Wie lässt sich die Formel bzw. die Aussage äquivalent abkürzen?
(iv) Woraus ergibt sich die Äquivalenz?

PVL-verwendbare Aufgaben sind blau gefärbt. Rote Nummer: gleich in der Vorlesung.

50. Substituierbarkeit von Termen für Variablen in Formeln

(i) Wo gilt free (τ, x, φ) ? –:

	τ	φ	ja	nein
a)	y	$\forall y P(f(x))$		
b)	$f(x,y)$	$R(x,y) \to \forall y P(y)$		
c)	$f(x,y)$	$\forall y R(y,c) \vee \exists y R(x,y)$		
d)	$f(x,y)$	$\forall x R(x,y)$		

(ii) Schreiben Sie einen Term τ und eine Formel φ, bei denen oben „ja“ gelten würde, und zwar genau wegen des Falles (3) im Prüfalgorithmus für „frei für“ auf Folie 309.

$\boxed{\text{E17}}$ Substituierbarkeit, „frei für“

Definieren Sie free (τ, x, φ) rekursiv über den Aufbau von φ.

51. PL1-Tableaux

Beweisen Sie mit PL1- Tableaux:

a) $[\forall x(P(x) \to Q(x)] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$

b) $\forall y[(\forall x[P(x) \to Q(x)] \wedge P(y)) \to Q(y)]$

Tipps: Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit des Gegenteils.
Vervollständigen Sie zu (a) das unten gezeigte Tableau, indem Sie die Nummern der Prämissen und ggf. die verwendeten Regeln eintragen.

(1) $\neg\{[\forall x(P(x) \to Q(x))] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]\}$

(2) $[\forall x(P(x) \to Q(x))]$ (....)

(3) $\neg[(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))]$ (....)

(4) $\forall x(P(x))$ (....)

(5) $\neg(\forall x Q(x))$ (....)

(6) $\neg Q(a)$ (...., TR .....)

(7) $P(a)$ (...., TR .....)

(8) $P(a) \to Q(a)$ (...., TR .....)

(9) $\neg P(a)$ (....) (10) $Q(a)$ (....)

Könnte man oben (6) und (7) vertauschen?

52. PL1-Werkzeugkasten

Beweisen Sie mit dem PL1-Werkzeugkasten:

a) $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)), P(m)\} \vDash R(m)$

b) $\forall x[P(x) \to Q(x)] \to [\forall x P(x) \to \forall x Q(x)]$

53. Pränexe Normal-Form

a) Anna bringt $\exists x P(x) \to \neg\exists y \neg Q(y)$ in drei Schritten in äquivalente BPNF:

→ $\exists x P(x) \to \forall y \neg\neg Q(y)$

→ $\exists x P(x) \to \forall y Q(y)$

→ $\exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$

Bea stellt mit Universum $\{0,1\}$, $P(x) :\Leftrightarrow x = 0$, $Q(y) :\Leftrightarrow y = 1$ fest, dass die erste und die letzte Formel nicht äquivalent sind.
Prüfen Sie, ob Anna oder Bea Recht hat (oder beide oder keine?)

Bringen Sie in BPNF:

b) $\forall x\{P(x) \to [\forall y R(x,y) \to \neg\forall z S(y,z)]\}$

$\boxed{\textbf{E18}}$ Pränexe Normal-Form
Bringen Sie in BPNF: $R(x,y) \to [\exists y\{P(y) \to ([\exists x P(x)] \to Q(y))\}]$

54. Skolem-Form

„Skolemisieren" Sie

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x \exists y R(x,y)$

c) $\forall x \exists y \forall z \exists w S(x,y,z,w)$

d) $\forall x \exists y [\exists u P(x, g(y, f(x))) \vee \neg Q(z) \vee \neg R(u,y)]$

55. Klauselnormalform

Bestimmen Sie jeweils eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform:

a) $P(x) \to [\forall y \exists z (S(x,z) \vee R(x,y,z))]$

b) $\exists x\{R(x,y) \to \neg\exists x Q(y,x)\}$

56. Herbrand-Expansion

Sei $\varphi = \forall x \forall y [P(x, f(x, g(y))) \wedge P(h(g(y)), f(h(x), y))]$

a) Zählen Sie 10 möglichst kurze Terme des Herbrand-Universums von φ auf.

b) Zählen Sie 3 möglichst kurze Formeln der Herbrand-Expansion von φ auf.

57. Unifikation

Geben Sie – wo möglich – einen allgemeinsten Unifikator an für ...

p(x, g(a), y)	und p(a, g(x), b)
p(a, x)	und p(x, g(x))
p(x)	und p(g(x))
p(h(x))	und p(g(x))
q(x, y)	und q(y, x)
q(a, y)	und q(y, x)
q(g(x, y), f(x))	und q(g(h(z), y), f(h(z)))
q(g(x, y), f(x))	und q(g(h(a), y), f(h(z)))

58. Resolution

Formalisieren Sie und zeigen Sie mittels Resolution die Unerfüllbarkeit von:
Der Barbier in unserem Ort rasiert genau alle Männer des Ortes, die sich nicht selbst rasieren.

Tipps:
1. Universum = Männer im Ort, b = der Barbier, R = rasiert.
2. Die beiden (nach geeigneter Unifikation) einander widersprechenden Literale für den Resolutionsschritt müssen nicht die offensichtlichsten sein.

59. Resolution
Formalisieren Sie und zeigen Sie mittels Resolution, dass (im Eisenbahnnetz) aus

- Bahnhof Darmstadt ist mit dem Bahnhof Erzhausen verbunden.
- Ist ein Bahnhof x mit einem Bahnhof y verbunden und dieser zum Bahnhof z benachbart, so ist Bahnhof x auch mit Bahnhof z verbunden.
- Bahnhof Erzhausen ist zum Bahnhof Egelsbach benachbart.

folgt:

- Bahnhof Darmstadt ist mit dem Bahnhof Egelsbach verbunden.

$\boxed{\text{E19}}$ Formeln – Eindeutige Lesbarkeit, eindeutiges Ende
Die Semantik einer AL/PL1/ML-Formel φ – nämlich der Wahrheitswert unter einer Interpretation bzw. Belegung – ist rekursiv über die induktive Formeldefinition definiert. So ist z.B. bezüglich Negation $\neg$, Quantor Qx ($\forall x$, $\exists x$) oder Modalität M ($\Diamond$,$\Box$) der Wert von $\neg\varphi$ / Q$x\varphi$ / Mφ definiert über den Wert von φ, und für einen Junktor J ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) ist der Wert von φ_1 J φ_2 definiert über die Werte von φ_1 und φ_2.

Könnten dabei Probleme auftreten?

A priori ja!

- Katastrophal wäre es, wenn es zwei Aufbauwege (Parsingbäume) für dieselbe Formel gäbe, wenn z.B. φ_1 J$_1$ φ_2 auch lesbar wäre als $\neg\varphi_3$ oder als φ_4 J$_2$ φ_5.
- Weniger gravierend, aber zumindest irritierend, wäre es, wenn man beim Lesen einer Formel versehentlich vorzeitig aufhören könnte, wenn also φ ein echtes Anfangsstück ψ besäße, das selbst eine Formel ist.

Glücklicherweise ist beides ausgeschlossen, sofern wir alle offiziell verlangten Klammern schreiben – auch die äußersten, wie bei „(A$\wedge$B)“ :

a) Zeigen Sie dass die AL- bzw. PL1- bzw. ML-Formeln nur eindeutig lesbar sind, also jeweils nur einen Parsingbaum haben.
b) Zeigen Sie dass keine AL-, PL1- oder ML-Formel ein echtes Anfangsstück besitzt, das selbst eine AL- bzw. PL1- bzw. ML-Formel ist.
c) Stimmt (b) wirklich? Was ist mit $\forall xP(x)\wedge Q(x)$? Da kann ich doch vor dem „$\wedge$“ aufhören zu lesen!?