Themenliste → hinten

Z1 Junktorenbasen

Zeigen Sie, dass $\{\leftrightarrow,\neg\}$ keine Junktorenbasis ist.

Tipps:
Kein Beweis wäre: „ Ich kann $A_1 \to A_2$ nicht durch $\leftrightarrow$ und $\neg$ ausdrücken“. – Vielleicht bin ich nur zu ungeschickt? Also müssen wir etwas mathematischer herangehen. ☹

Definition: $\{\leftrightarrow,\neg\}$-Formeln sollen jetzt AL-Formeln sein, in denen die anderen Junktoren nicht vorkommen, also induktiv:

(i) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sind $\{\leftrightarrow,\neg\}$-Formeln

(ii) Sind φ und ψ $\{\leftrightarrow,\neg\}$-Formeln, dann auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Zeigen Sie nun:

(a) Für jede $\{\leftrightarrow,\neg\}$-Formel φ gilt:

$\boxed{\text{Für jede Aussagevariable } A_i \text{ gilt entweder } \varphi_{[A_i/\neg A_i]} \equiv \varphi \text{ oder } \varphi_{[A_i/\neg A_i]} \equiv \neg\varphi.}$ (A)

(D.h. die durchgehende Negierung einer Aussagevariablen A_i negiert genau die ganze Formel oder verändert sie höchstens in eine äquivalente – z.B. verändert sie sich überhaupt nicht, wenn A_i in ihr nicht vorkommt.)

(b) Gilt (A) für eine beliebige AL-Formel φ, dann auch für jede dazu äquivalente.

(c) $A_1 \to A_2$ erfüllt (A) nicht, ist also nicht äquivalent zu irgendeiner $\{\leftrightarrow,\neg\}$-Formel.

Z2 Wahrheitstafeln

Bestimmen Sie <u>mit der Wahrheitstafelmethode</u> den Wahrheitswerteverlauf der AL-Formel $((A \to B) \wedge \neg C) \vee (A \leftrightarrow C)$.

Benutzen Sie <u>eine</u> der beiden folgenden Tabellenformen.

A	B	C	A→B	
W				
W				
W				
W				
F				
F				
F				
F				

((A	$\rightarrow$	B)	$\wedge$	$\neg$	C)	$\vee$	(A	$\leftrightarrow$	C)
W							W		
W							W		
W							W		
W							W		
F							F		
F							F		
F							F		
F							F		

Z3 Semantische Begriffe, insbes. Folgerung

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Behauptungen jeweils generell stimmen: JA NEIN
Geben Sie, wo möglich, Gegenbeispiele an.

		JA	NEIN
a)	Wenn φ eine kontingente AL-Formel ist, dann ist sie auch erfüllbar.	○	○
b)	Wenn φ eine allgemeingültige AL-Formel ist, dann ist sie auch kontingent.	○	○
c)	Wenn φ eine erfüllbare AL-Formel ist, dann ist $\neg\varphi$ unerfüllbar.	○	○
d)	Eine Folgerung aus einer Menge kontingenter AL-Formeln ist kontingent.	○	○
e)	Eine Folgerung aus einer Menge allgemeingültiger AL-Formeln ist allgemeingültig.	○	○
f)	Eine Folgerung aus einer Menge unerfüllbarer AL-Formeln ist unerfüllbar.	○	○
g)	Eine nicht leere Menge aus unerfüllbaren AL-Formeln ist widersprüchlich.	○	○
h)	Jede unerfüllbare endliche Menge von AL-Formeln enthält mindestens eine widersprüchliche oder zwei widerlegbare AL-Formeln.	○	○
i)	Wenn φ eine kontingente AL-Formel ist, dann ist $\neg\varphi$ widerlegbar.	○	○
j)	Jede Folgerung aus der Menge aller kontingenten Tautologien ist allgemeingültig.	○	○
k)	Die Theorie (Menge aller Folgerungen aus) der Menge aller unerfüllbaren AL-Formeln ist erfüllbar.	○	○
l)	Die Theorie (Menge aller Folgerungen aus) jeder Menge von AL-Formeln enthält mindestens drei Tautologien.	○	○

Tipp: Testen Sie die Behauptung evtl. mit einfachen AL-Formeln bzw. mit kleinen daraus bestehenden Formelmengen.

Z4 Normalformen

Wandeln Sie jeweils in eine äquivalente KNF-Formel in Klauselmengenform $\{\ldots\}_{KNF}$ um:

a) $\neg(P \to Q)$

b) $P \to (Q \vee R)$

c) $P \to (Q \wedge R)$

d) $\big((A \to (B \vee C)) \wedge (B \to (C \wedge D))\big)$

Dabei sollte jeweils der Lösungsweg erkennbar sein; es gibt mehrere Möglichkeiten.
Beachten Sie dass jedes Ergebnis eine Menge von Mengen von Literalen ist.
Sie können in (d) Erkenntnisse aus (b) und (c) verwenden.

Wandeln Sie jeweils in eine äquivalente DNF-Formel in Dualklauselmengenform $\{\ldots\}_{DNF}$ um:

e) $P \to Q$

f) $\neg\big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big)$

g) $P \leftrightarrow Q$

h) $\big((A \wedge \neg(B \vee C)) \to (B \leftrightarrow C)\big)$

Dabei sollte jeweils der Lösungsweg erkennbar sein; es gibt mehrere Möglichkeiten.
Beachten Sie dass jedes Ergebnis eine Menge von Mengen von Literalen ist.
Sie können in (h) Erkenntnisse aus (f) und (g) verwenden.

Z5 AL-Resolution

Beweisen Sie per aussagenlogischer Resolution:

Aus

(1) Hans hustet nicht, oder Gerd grübelt, oder Lena lächelt.
(2) Gerd grübelt nicht, oder sowohl Ina isst als auch Dora döst.
(3) Lena lächelt nicht, oder sowohl Dora döst als auch Kevin kichert.

folgt

(4) Dora döst, oder Hans hustet nicht.

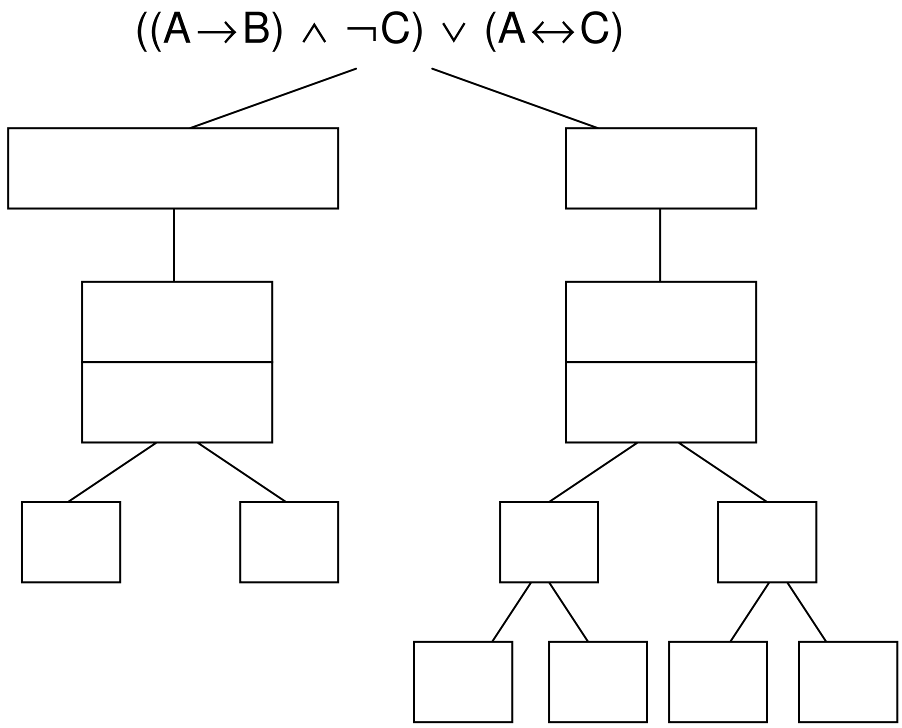
Anleitung:

- Schreiben Sie die Aussagen symbolisch, unter Verwendung geeigneter Abkürzungen, beispielsweise Hans hustet =: H.
- Bringen Sie (2) in die Form (2a) $\wedge$ (2b) mit geeigneten Klauseln (2a) und (2b), indem Sie beachten, dass $\varphi \vee (\psi \wedge \rho) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \rho)$.
- Analog auch bei (3).
- Bringen Sie auch $\underline{\neg(4)}$ in die KNF (5) $\wedge$ (6)
- Leiten Sie aus (1) $\wedge$ (2a) $\wedge$ (2b) $\wedge$ (3a) $\wedge$ (3b) $\wedge$ (5) $\wedge$ (6) mit möglichst wenigen Resolutionsschritten einen Widerspruch (leere Klausel) ab.

Z6 AL-Tableaux

Bestimmen Sie mit der Tableaumethode eine DNF der AL-Formel
$((A \rightarrow B) \wedge \neg C) \vee (A \leftrightarrow C)$.
Kennzeichnen Sie die abgeschlossenen Blätter mit X und die offenen mit O.
Verwenden Sie die offenen Blätter für die Dualklauseln.
Sie können die DNF-Formel wahlweise in Junktoren- oder Mengenschreibweise angeben.

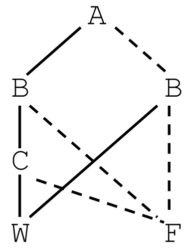
Füllen Sie dazu den untenstehenden Baum aus.



Antwort: ....

Z7 BDDs

Eine Formel X hat folgenden ROBDD für die Abfragereihenfolge A-B-C:
Durchgezogen ——— : W Gestrichelt - - - - - : F



Konstruieren Sie einen ROBDD der Formel X für die Abfragereihenfolge B-C-A, und zwar in folgenden Schritten:

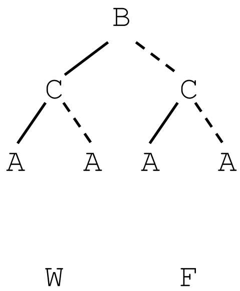
1. Schritt: Wahrheitswerteverlauf aufschreiben:

A	B	C	X
W	W	W	
W	W	F	
W	F	W	
W	F	F	

A	B	C	X
F	W	W	
F	W	F	
F	F	W	
F	F	F	

2. Schritt: Denselben Wahrheitswerteverlauf, aber für die Abfragereihenfolge B-C-A, aufschreiben (analog zu 1).

3. Schritt: Diesen Wahrheitswerteverlauf als OBDD (für B-C-A) aufzeichnen (bitte vervollständigen).



4. Schritt: Grafische Reduktionsschritte durchführen.

Z8 Werkzeugkasten-Kalkül

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis mit „unserem Werkzeugkasten“. Es sind die fehlenden Begründungen einzutragen (Ann=AE).

Zeige $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$

(1)	|	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$	Ann
	|	Zeige $B \vee C$	
(2)	| |	$\neg(B \vee C)$	Ann
(3)	| |	$\neg B$	$\boxed{}$
(4)	| |	$\neg C$	$\boxed{}$
(5)	| |	$A \vee B$	1, UB
(6)	| |	A	$\boxed{}$
(7)	| |	$\neg A \vee C$	$\boxed{}$
(8)	| |	$\neg A$	$\boxed{}$
(9)	| |	$\perp$	$\boxed{}$
(10)	|	$B \vee C$	IB
(11)		$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$	$\boxed{}$

Z9 Werkzeugkasten-Kalkül

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis für eine Folgerung
a) mit einem indirekten Beweis
b) mit einem direkten Beweis (natürlich ohne darin versteckten indirekten Beweis)

a)	(1)	$A \vee B$	Geg.
	(2)	$A \rightarrow C$	Geg.
	(3)	$C \vee \neg B$	Geg.
		Zeige C	
	(4)	| $\neg C$	Ann.

b)	(1)	$A \vee B$	Geg.
	(2)	$A \rightarrow C$	Geg.
	(3)	$C \vee \neg B$	Geg.
		Zeige C	

Z10 AL-Werkzeuge I, gemischt

A, B und C werden verdächtigt, einen Einbruch begangen zu haben. Man findet heraus:

(1) Niemand außer A, B und C kann beteiligt gewesen sein.
(2) A „arbeitet" nie ohne Komplizen.
(3) C ist unschuldig.

Man formalisiere dieses Wissen und entscheide

a) mit Tableau,
b) mit Werkzeugkasten,

ob B schuldig oder unschuldig ist.

Z11 AL-Werkzeuge II, gemischt

Auf einer Burg, die ausschließlich von Rittern und Knappen bewohnt ist, sagen Ritter immer die Wahrheit, und Knappen lügen immer. Ein Burgbewohner zeigt auf einen anderen und sagt: „Der ist kein Knappe, aber ich bin einer." Was ist der, auf den er zeigte – Ritter oder Knappe?

a) Stellen Sie Wissen und Frage als AL-Formeln dar.

Beweisen Sie die Antwort mit

b) Resolution,
c) Wahrheitstafel.

Z12 PL1

Formalisieren Sie in PL1 (Universum? Relationen?):

a) Keiner mag mich.
b) Jemand mag mich.
c) Alle mögen mich.
d) Ich mag niemanden, der Dich mag.
e) Alle Wege führen nach Rom.
f) Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
g) The first cut is the deepest.
h) Wer A sagt muss auch B sagen.
i) Hunde, die bellen, beißen nicht.
j) Das letzte Hemd hat keine Taschen.

Z13 PL1

Angenommen, Sie wollen beweisen, dass im Universum der Lebewesen aus den Aussagen

1. Alle Hunde heulen nachts.
2. Wer mindestens eine Katze hat, hat keine Maus.
3. Wer ein Lebewesen hat, das nachts heult, der schläft nicht gut.
4. Aron hat eine Katze oder einen Hund (oder beides).

folgt:

5. Wenn Aron gut schläft, dann hat er keine Mäuse.

Vollziehen Sie dazu den ersten Schritt, indem Sie (1) bis (5) als PL1-Formeln schreiben, und zwar mit

a	für Aron
H(x)	für „x ist **H**und“,
K(x)	für „x ist **K**atze“,
M(x)	für „x ist **M**aus“,
N(x)	für „x heult **n**achts“,
B(x,y)	für „x hat (**b**esitzt) y“
S(x)	für „x schläft gut“

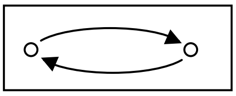
Tipp: Prüfen Sie am Ende nochmal die Klammerung.

Z14 PL1-Semantik

Zeigen Sie, dass ...

(a) $\varphi: \ \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$ nicht allgemeingültig ist;

Tipps: zu a: Verwenden Sie als Interpretation eine Menge M und eine Relation R auf M, die φ falsch macht, beispielsweise die natürlichen Zahlen mit einer (welcher?) bekannten einfachen Relation,

oder lassen Sie sich von dem Bild  inspirieren.

(b) die Folgerung $\neg\exists y \forall x R(x, y) \models \neg\forall x \exists y R(x, y)$ falsch ist;

(c) die Formelmenge $\{\forall x \exists y R(x, y), \forall y \neg\forall x R(x, y)\}$ erfüllbar ist.

Tipps zu b,c: Verwenden Sie (a).

Z15 PL1-Tableaux

Zeigen Sie, dass $\forall x \exists y R(x, y) \vee \exists u \forall v \neg R(u, v)$ allgemeingültig ist, indem Sie per Tableau zeigen, dass die Negation davon widersprüchlich ist.
Hinweis: Bitte ...

- Formeln nummerieren,
- jeweils Prämissennummer und bei Quantifizierung Tableauregel dazuschreiben,
- in geschlossenen Zweigen widersprüchliche Literale umrahmen

Z16 PL1-Normalformen

(a) Bringen Sie $\forall z \exists y [p(y, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)] \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x,z), z)$ in BPNF.
(b) Bringen Sie $\forall x \exists y \forall z \exists u \forall v \exists w R(x, y, z, u, v, w)$ in Skolem-Form.
(c) Bringen Sie $\forall z \exists y [P(y, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)] \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x,z), z)$ in Kl-NF

Gesucht ist jeweils eine erfüllbarkeitsäquivalente – nicht unbedingt äquivalente – Formel!

Z17 Unifikation

Bestimmen Sie (wenn möglich) den allgemeinsten Unifikator von
$\{\ \neg R(f(x, g(c, y)), h(x)),\ \neg R(f(f(u,v), w), h(f(c,d)))\ \}$.

Z18 Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die PL1-Klauselmenge
$$\{\{\neg P(x), \neg P(f(a)), Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg P(g(b,x)), \neg Q(b)\}\}$$
unerfüllbar ist.
Welche unerfüllbare geschlossene PL1-Formel entspricht der Kl-NF-Menge?

Z19 PL1-Werkzeugkasten

Zeigen Sie mithilfe des **PL1-Werkzeugkasten**, dass
$[\exists x P(x) \vee \neg \forall y Q(y)] \to \exists x (Q(x) \to P(x))$ allgemeingültig ist.
Verwenden Sie das untenstehende Schema und füllen Sie nur noch die jeweiligen Begründungen ein.

	Zeige $[\exists x P(x) \vee \neg \forall y Q(y)] \to \exists x (Q(x) \to P(x))$	
1	| $\exists x P(x) \vee \neg \forall y Q(y)$	....
	| Zeige $\exists x (Q(x) \to P(x))$	
2	| | $\neg \exists x (Q(x) \to P(x))$	....
3	| | $\forall x \neg (Q(x) \to P(x))$	....
	| | Zeige $\neg \exists x P(x)$	
4	| | | $\exists x P(x)$	....
5	| | | $P(a)$	....
6	| | | $\neg (Q(a) \to P(a))$	....
7	| | | $Q(a) \wedge \neg P(a)$	....
8	| | | $\neg P(a)$	....
9	| | | $\bot$	....
10	| | $\neg \exists x P(x)$	....
11	| | $\neg \forall y Q(y)$	....
12	| | $\exists y \neg Q(y)$	....
13	| | $\neg Q(b)$	....
14	| | $\neg (Q(b) \to P(b))$	....
15	| | $Q(b) \wedge \neg P(b)$	....
16	| | $Q(b)$	....
17	| | $\bot$	....
18	| $\exists x (Q(x) \to P(x))$	....
19	$[\exists x P(x) \vee \neg \forall y Q(y)] \to \exists x (Q(x) \to P(x))$	....

Z20 PL1-Werkzeugkasten, nat. Sprache

Beweisen Sie die folgenden Folgerungen, indem Sie die Aussagen in PL1 wiedergeben und den PL1-Werkzeugkasten anwenden:

a) (1) Wenn es regnet ist die Erde nass.
(2) Letzten Monat hat es an mindestens einem Tag geregnet.
(3) Also war letzten Monat an mindestens einem Tag die Erde nass.

b) (1) Wenn es regnet ist die Erde nass.
(2) Es regnete letzten Monat jeden Tag.
(3) Also war letzten Monat jeden Tag die Erde nass.

Tipps: Das Universum bestehe z.B. aus den Tagen des letzten Monats.
Formen Sie (1) um in eine Aussage über die Objekte des Universums!

Z21 PL1-Werkzeuge, nat. Sprache

c) Formulieren Sie die folgenden Aussagen als PL1-Formeln:

i) Jeder Drache ist zufrieden, wenn alle seine Kinder fliegen können.
ii) Grüne Drachen können fliegen.
iii) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
iv) Alle grünen Drachen sind zufrieden.

Zeigen Sie mit

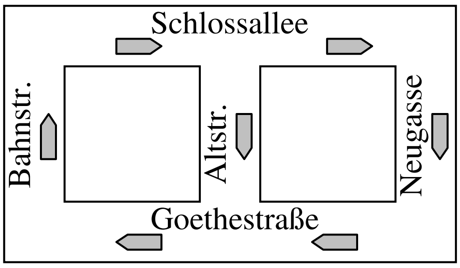
b) PL1-Werkzeugkasten,
c) Resolution,
d) Tableaubaum,

dass aus den Aussagen (i)-(iii) die Aussage (iv) folgt.

Tipp: Es geht nur um Drachen; also braucht man nicht das Prädikat, Drache zu sein.

Z22 Modallogik

In Modalstadt gibt es 6 Kreuzungen bzw. Ecken und 5 Straßen, allesamt Einbahnstraßen, siehe Stadtplan:



Es gibt drei Kneipen (Ecke Bahn/Schloss, Schloss/Neu und Alt/Goethe), vier Handyläden (Ecke Goethe/Bahn, Schloss/Alt, Alt/Goethe und Neu/Goethe), zwei Boutiquen (Ecke Bahn/Schloss und Schloss/Neu) und eine S-Bahn-Haltestelle (Ecke Bahn/Schloss).

Die Bürger interessieren sich nur für die Existenz und die Erreichbarkeit ihrer Einrichtungen über eine Anzahl Blocks/Straßenzüge von Ecke/Kreuzung zu Ecke/Kreuzung, und zwar mit dem Auto, d.h. in Richtung der Einbahnstraßen.

1. Formalisieren Sie Modalstadt als Kripke-Struktur (Rah, Bel), Rah = (K,R), K = (Sb, Sa, Sn, Gb, Ga, Gn) [Anfangsbuchstaben der beiden sich treffenden Straßen!]

R = {(.....,.....), ...}

Aussagevariablen: ....

Bel(Sb) = ... Bel(Sa) = ... Bel(Sn) = ...

Bel(Gb) = ... Bel(Ga) = ... Bel(Gn) = ...

Es ist hilfreich für (2), nun den Graphen mit Knotennamen und -belegungen zu skizzieren.

2. Schreiben sie Modalformeln für folgende Aussagen (und jeweils in welchen Situationen sie gelten):

   a) Es gibt einen Block weiter einen Handyladen.

      Formel: .... gilt in: ....

   b) Wenn an dieser Ecke eine Kneipe ist, gibt es zwei Blocks weiter garantiert eine Kneipe, egal wie man fährt.

      Formel: .... gilt in: ....

   c) Hier ist eine Kneipe, und 1 Block weiter auch.

      Formel: .... gilt in: ....

   d) Wenn es hier einen Handyladen gibt, gibt es hier keine Boutique.

      Formel: .... gilt in: ....

   e) Es gibt einen Block von hier einen Handyladen oder eine Kneipe.

      Formel: .... gilt in: ....

   f) Wenn hier eine Boutique ist, muss man, wenn man nicht gleich in die eventuell hier gelegene Kneipe gehen will, keine drei Blocks fahren, um zu einer Kneipe zu kommen.

      Formel: .... gilt in: ....

Z23 PLTL

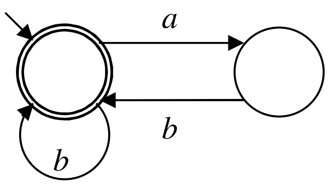
Wir betrachten jetzt ausschließlich Folgen von Situationen, in denen genau a oder b gilt, so dass insbesondere $\mathsf{G}(a \leftrightarrow \neg b)$ und für alle anderen Aussagevariablen P gilt: $\mathsf{G}\neg P$.

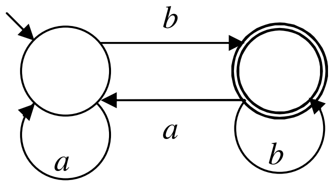
Nun seien wie folgt elf ω-Sprachen (Folgenmengen) über dem Alphabet $\{a, b\}$ definiert – sei es natürlichsprachlich, mit Büchi-Automat, mit PLTL-Formel oder als ω-regulärer Ausdruck:

L_1 : Auf jedes a muss unmittelbar ein b folgen.

L_2 : Auf jedes a muss irgendwann ein b folgen.

L_3 : Es muss immer wieder einmal ein b kommen (nie nur noch a's).

L_4 : 

L_5 : 

L_6 : $(b \mid ab)^{\omega}$

L_7 : $(b^* \mid ab)^{\omega}$

L_8 : $(b \mid a^* b)^{\omega}$

L_9 : $\mathsf{GF}\, b$

L_{10} : $\mathsf{G}(a \rightarrow \mathsf{X}\, b)$

L_{11} : $\neg\mathsf{FG}\, a$

Tragen Sie die Sprachen („L_n") in die folgenden Kästen so ein, dass gleiche Sprachen im gleichen Kasten stehen und unterschiedliche Sprachen in verschiedenen Kästen. Es kann sein, dass nicht alle Kästen benutzt werden müssen.

Z24 PL1, nat. Sprache, Resolution

Wir betrachten folgende Aussagen, bezogen auf das Universum der Menschen:

1. Jeder, der Junge oder Mädchen ist, ist ein Kind.
2. Alle Kinder bekommen eine Puppe, eine Eisenbahn oder ein Logikbuch.
3. Kein Junge bekommt eine Puppe.
4. Kein braves Kind bekommt ein Logikbuch.
5. Wenn kein Kind eine Eisenbahn bekommt, dann ist kein Junge brav.

a) Übersetzen Sie die fünf Aussagen in geschlossene PL1-Formeln (1) bis (5), wobei
J(x), M(x), K(x), B(x) bedeutet x ist **J**unge, **M**ädchen, **K**ind bzw. **b**rav.
P(x), E(x), L(x) bedeutet x bekommt ein(e) **P**uppe, **E**isenbahn bzw. **L**ogikbuch.

b) Übersetzen Sie jede der Formeln (1 bis 4) und die Negation von (5) in Mengen-Klauselnormalform mit getrennten Variablen, ggf. mit Konstanten und Funktionen vom Skolemisieren.

c) Beweisen Sie mittels PL1-Resolution, dass

$$(1)\wedge(2)\wedge(3)\wedge(4) \rightarrow (5)$$

allgemeingültig ist,
d.h. dass $(1)\wedge(2)\wedge(3)\wedge(4)\wedge\neg(5)$ unerfüllbar ist,
d.h. dass aus der der Menge aller Klauselmengen aus (b) mit Resolutionsschritten (incl. Unifikation) die leere Klausel gefolgert werden kann.

Themenübersicht