Z1 Junktorenbasen

Zeigen Sie, dass $\{\leftrightarrow, \neg\}$ keine Junktorenbasis ist.

Tipps:
Kein Beweis wäre: „ Ich kann $A_1 \to A_2$ nicht durch $\leftrightarrow$ und $\neg$ ausdrücken“. – Vielleicht bin ich nur zu ungeschickt? Also müssen wir etwas mathematischer herangehen. ☹

Definition: $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formeln sollen jetzt AL-Formeln sein, in denen die anderen Junktoren nicht vorkommen, also induktiv:

(i) $A_1, A_2, A_3, \dots$ sind $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formeln

(ii) Sind φ und ψ $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formeln, dann auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Zeigen Sie nun:

(a) Für jede $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel φ gilt:

$\boxed{\text{Für jede Aussagevariable } A_i \text{ gilt entweder } \varphi_{[A_i/\neg A_i]} \equiv \varphi \text{ oder } \varphi_{[A_i/\neg A_i]} \equiv \neg\varphi.}$ (A)

(D.h. die durchgehende Negierung einer Aussagevariablen A_i negiert genau die ganze Formel oder verändert sie höchstens in eine äquivalente – z.B. verändert sie sich überhaupt nicht, wenn A_i in ihr nicht vorkommt.)

Lösung Z1(a)
Beweis per Induktion über den Formelaufbau (siehe Definition):

(i) (A) gilt für $A_1, A_2, A_3, \dots$, denn mit der Substitution Ai→¬Ai wird Ai zu ¬Ai, und ansonsten (k≠i) bleibt Ak unverändert Ak.

(ii-a) Sei φ $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel mit (A) und *i* aus 1,2,… . Dann ist per Definition $(\neg\varphi)_{[A_i/\neg A_i]} = \neg(\varphi_{[A_i/\neg A_i]})$, und das ist wegen (A) $\equiv \neg\varphi$ oder $\equiv \neg(\neg\varphi)$.

(ii-b) Sei φ und ψ $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formeln mit (A) und *i* aus 1,2,… . Dann ist per Definition $(\varphi \leftrightarrow \psi)_{[A_i/\neg A_i]} = \varphi_{[A_i/\neg A_i]} \leftrightarrow \psi_{[A_i/\neg A_i]}$, und das ist wegen (A) ...
$\equiv (\varphi \leftrightarrow \psi)$ oder $\equiv (\neg\varphi \leftrightarrow \psi)$ oder $\equiv (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ oder $\equiv (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$;
und somit $\equiv (\varphi \leftrightarrow \psi)$ oder $\equiv \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, d.h. (A) gilt auch für $\varphi \leftrightarrow \psi$.

(b) Gilt (A) für eine beliebige AL-Formel φ, dann auch für jede dazu äquivalente.

Lösung Z1(b)
Seien φ und ψ AL-Formeln, es gelte (A) für φ und ferner sei $\varphi \equiv \psi$. Dann hat $\psi_{[A_i/\neg A_i]}$ die Modelle „$M_{[A_i/\neg A_i]}$“, wobei *M* die Modelle von ψ durchläuft, und sich $M_{[A_i/\neg A_i]}$ und *M* durch gegenteilige A_i – Werte unterscheiden. (Wir betrachten nur die Belegungen aller Aussagevariablen aus φ und ψ zusammen.) Wegen $\varphi \equiv \psi$ durchläuft *M* auch die Modelle von φ, also $M_{[A_i/\neg A_i]}$ auch die Modelle von $\varphi_{[A_i/\neg A_i]}$. Also haben $\psi_{[A_i/\neg A_i]}$ und $\varphi_{[A_i/\neg A_i]}$ dieselben Modelle, sind also zu φ oder $\neg\varphi$ äquivalent, also auch zu ψ oder $\neg\psi$. Also gilt (A) für ψ.

(c) $A_1 \rightarrow A_2$ erfüllt (A) nicht, ist also nicht äquivalent zu irgendeiner $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel.

Lösung Z1(c)

„also"-Teil folgt aus (a) und (b).

Weder ist $\neg A_1 \rightarrow A_2 \equiv A_1 \rightarrow A_2$ noch $\neg A_1 \rightarrow A_2 \equiv \neg(A_1 \rightarrow A_2)$, was man an den Wahrheitswerteverläufen in den (hier kombinierten) W.-Tafeln abliest:

A_1	A_2	$\neg A_1$	$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1 \rightarrow A_2$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$
W	W	F	**W**	**W**	**F**
W	F	F	**F**	**W**	**W**
F	W	W	**W**	**W**	**F**
F	F	W	**W**	**F**	**F**

Z2 Wahrheitstafeln

Bestimmen Sie mit der Wahrheitstafelmethode den Wahrheitswerteverlauf der AL-Formel $((A \rightarrow B) \wedge \neg C) \vee (A \leftrightarrow C)$.

Benutzen Sie eine der beiden folgenden Tabellenformen.

A	**B**	**C**	**$A \rightarrow B$**	$\neg C$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg C$	$A \leftrightarrow C$	$((A \rightarrow B) \wedge \neg C) \vee (A \leftrightarrow C)$
W	W	W	W	F	F	W	W
W	W	F	W	W	W	F	W
W	F	W	F	F	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	W	F	F	F	F
F	W	F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	F	F	F	F
F	F	F	W	W	W	W	W

(Inline-Tafel grafisch aufbereitet, um Reihenfolge sichtbarer zu machen.)

						$\vee$			
			$\wedge$					$\leftrightarrow$	
	$\rightarrow$			$\neg$			**A**		**C**
A		**B**			**C**				
W	W	W	F	F	W	W	**W**	W	W
W	W	W	W	W	F	W	**W**	F	F
W	F	F	F	F	W	W	**W**	W	W
W	F	F	F	W	F	F	**W**	F	F
F	W	W	F	F	W	F	**F**	F	W
F	W	W	W	W	F	W	**F**	W	F
F	W	F	F	F	W	F	**F**	F	W
F	W	F	W	W	F	W	**F**	W	F

Z3 Semantische Begriffe, insbes. Folgerung

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Behauptungen jeweils generell stimmen: Geben Sie, wo möglich, Gegenbeispiele an.	JA	NEIN
a) Wenn φ eine kontingente AL-Formel ist, dann ist sie auch erfüllbar.	●	○
kontingent ⇔ kann je nach Belegung W und F sein ⇔ erfüllbar + widerlegbar.		
b) Wenn φ eine allgemeingültige AL-Formel ist, dann ist sie auch kontingent.	○	●
allgemeingültig: ist nie F, nicht widerlegbar: generell falsch		
c) Wenn φ eine erfüllbare AL-Formel ist, dann ist $\neg\varphi$ unerfüllbar.	○	●
GegBsp: A. Stimmt nur für spezielle erfüllbare: für allgemeingültige		
d) Eine Folgerung aus einer Menge kontingenter AL-Formeln ist kontingent.	○	●
GegBsp: $\{A,\neg A\} \models A\wedge\neg A$. Kann manchmal stimmen: $\{A\} \models A$		
e) Eine Folgerung aus einer Menge allgemeingültiger AL-Formeln ist allgemeingültig.	●	○
Das besagt ein Satz.		
f) Eine Folgerung aus einer Menge unerfüllbarer AL-Formeln ist unerfüllbar.	○	●
GegBsp: $\{A\wedge\neg A\} \models A$		
g) Eine nicht leere Menge aus unerfüllbaren AL-Formeln ist widersprüchlich.	●	○
Sie können nicht gleichzeitig alle (ja sogar nie einzeln) W sein.		
h) Jede unerfüllbare endliche Menge von AL-Formeln enthält mindestens eine unerfüllbare oder zwei widerlegbare AL-Formeln.	●	○
$\varphi 1\wedge\ldots\wedge\varphi n$ immer F. Wäre kein φ_i immer F und höchstens eine Formel φ_j widerlegbar, dann wären alle anderen immer W und φ_j hätte eine W-Belegung, und die wäre dann ein Modell für die (somit erfüllbare) Formelmenge.		
i) Wenn φ eine kontingente AL-Formel ist, dann ist $\neg\varphi$ widerlegbar.	●	○
kontingent: kann W sein, dort ist $\neg\varphi$ dann F		
j) Jede Folgerung aus der Menge aller kontingenten Tautologien ist allgemeingültig.	●	○
Die Menge ist leer! Also gemäß Satz.		
k) Die Theorie (Menge aller Folgerungen aus) der Menge aller unerfüllbaren AL-Formeln ist erfüllbar.	○	●
enthält alle Formeln und somit $A\wedge\neg A$. Das ist unerfüllbar, also die ganze Theorie auch.		
l) Die Theorie (Menge aller Folgerungen aus) jeder Menge von AL-Formeln enthält mindestens drei Tautologien.	●	○
Jede Theorie enthält alle Tautologien, also unendlich viele, z.B. $A\vee\neg A$, $A\vee A\vee\neg A$, ...		

Z4 Normalformen

Wandeln Sie jeweils in eine äquivalente KNF-Formel in Klauselmengenform $\{\ldots\}_{KNF}$ um:

a) $\neg(P \to Q)$

b) $P \to (Q \vee R)$

c) $P \to (Q \wedge R)$

d) $\big((A \to (B \vee C)) \wedge (B \to (C \wedge D))\big)$

Dabei sollte jeweils der Lösungsweg erkennbar sein; es gibt mehrere Möglichkeiten.
Beachten Sie dass jedes Ergebnis eine Menge von Mengen von Literalen ist.
Sie können in (d) Erkenntnisse aus (b) und (c) verwenden.

Wandeln Sie jeweils in eine äquivalente DNF-Formel in Dualklauselmengenform $\{\ldots\}_{DNF}$ um:

e) $P \to Q$

f) $\neg\big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big)$

g) $P \leftrightarrow Q$

h) $\big((A \wedge \neg(B \vee C)) \to (B \leftrightarrow C)\big)$

Dabei sollte jeweils der Lösungsweg erkennbar sein; es gibt mehrere Möglichkeiten.
Beachten Sie dass jedes Ergebnis eine Menge von Mengen von Literalen ist.
Sie können in (h) Erkenntnisse aus (f) und (g) verwenden.

Lösung Z4
(Beispiele: syntaktische Umformung)
Die Ansatzpunkte für die nächste Umformung sind jeweils gelb markiert.

a) $\neg(P \to Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee Q) \rightarrow \neg\neg P \wedge \neg Q \rightarrow P \wedge \neg Q \rightarrow \{\{P\},\{\neg Q\}\}_{KNF}$

b) $P \to (Q \vee R) \rightarrow \neg P \vee (Q \vee R) \rightarrow \{\{\neg P, Q, R\}\}_{KNF}$

c) $P \to (Q \wedge R) \rightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \rightarrow \{\{\neg P, Q\},\{\neg P, R\}\}_{KNF}$

d) $\big((A \to (B \vee C)) \wedge (B \to (C \wedge D))\big) \rightarrow$ wg. (b,c) $\rightarrow \{\{\neg A, B, C\}, \{\neg B, C\},\{\neg B, D\}\}_{KNF}$

e) $P \to Q \rightarrow \neg P \vee Q \rightarrow \{\{\neg P\},\{Q\}\}_{DNF}$

f) $\neg\big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big) \rightarrow \neg P \vee \neg\neg(Q \vee R) \rightarrow \neg P \vee Q \vee R \rightarrow \{\{\neg P\},\{Q\},\{R\}\}_{DNF}$

g) $P \leftrightarrow Q \rightarrow \ldots$ [1] $\rightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \{\{P, Q\},\{\neg P, \neg Q\}\}_{DNF}$

h) $\big((A \wedge \neg(B \vee C)) \to (B \leftrightarrow C)\big) \rightarrow \neg(A \wedge \neg(B \vee C)) \vee (B \leftrightarrow C) \rightarrow$ wg. (f,g) $\rightarrow$
$(\neg A \vee B \vee C) \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \rightarrow \{\{\neg A\},\{B\}, \{C\},\{B, C\},\{\neg B, \neg C\}\}_{DNF}$

[1] syntakt. Umformung und unerfüllbare Dualklauseln wie $P\wedge\neg P$ hier ausnahmsweise weggelassen.

Z5 AL-Resolution

Beweisen Sie per aussagenlogischer Resolution:

Aus

(1) Hans hustet nicht, oder Gerd grübelt, oder Lena lächelt.
(2) Gerd grübelt nicht, oder sowohl Ina isst als auch Dora döst.
(3) Lena lächelt nicht, oder sowohl Dora döst als auch Kevin kichert.

folgt

(4) Dora döst, oder Hans hustet nicht.

Anleitung:

- Schreiben Sie die Aussagen symbolisch, unter Verwendung geeigneter Abkürzungen, beispielsweise Hans hustet =: H.
- Bringen Sie (2) in die Form (2a) $\wedge$ (2b) mit geeigneten Klauseln (2a) und (2b), indem Sie beachten, dass $\varphi \vee (\psi \wedge \rho) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \rho)$.
- Analog auch bei (3).
- Bringen Sie auch $\underline{\neg(4)}$ in die KNF (5) $\wedge$ (6)
- Leiten Sie aus (1) $\wedge$ (2a) $\wedge$ (2b) $\wedge$ (3a) $\wedge$ (3b) $\wedge$ (5) $\wedge$ (6) mit möglichst wenigen Resolutionsschritten einen Widerspruch (leere Klausel) ab.

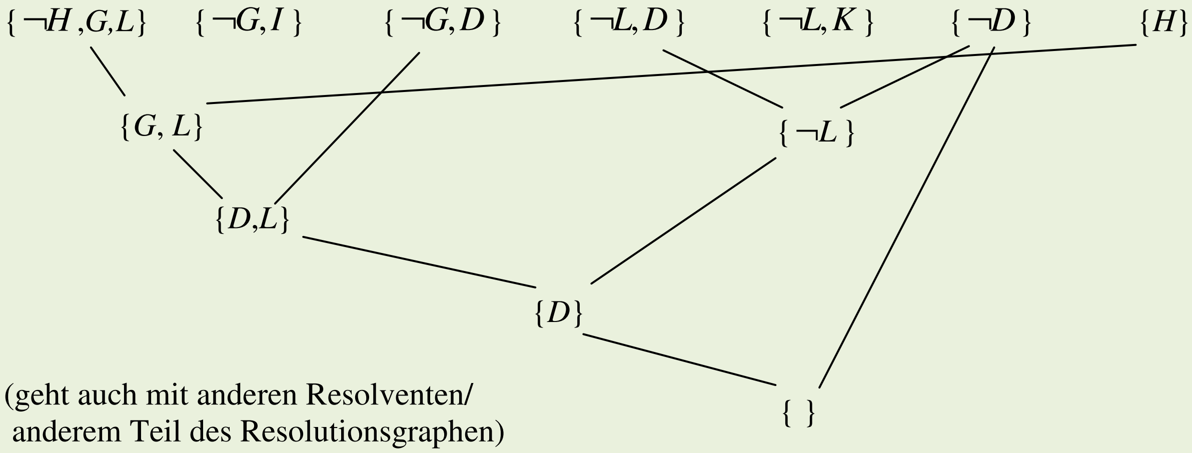
Lösung Z5

(1) $\neg H \vee G \vee L$ → $\{\neg H, G, L\}$

(2) $\neg G \vee (I \wedge D)$ → $((\neg G \vee I) \wedge (\neg G \vee D)$ → $\{\neg G, I\}, \{\neg G, D\}$

(3) $\neg L \vee (D \wedge K)$ → $(\neg L \vee D) \wedge (\neg L \vee K)$ → $\{\neg L, D\}, \{\neg L, K\}$

(4) $D \vee \neg H$, verneint: → $(\neg D) \wedge (H)$ → $\{\neg D\}, \{H\}$

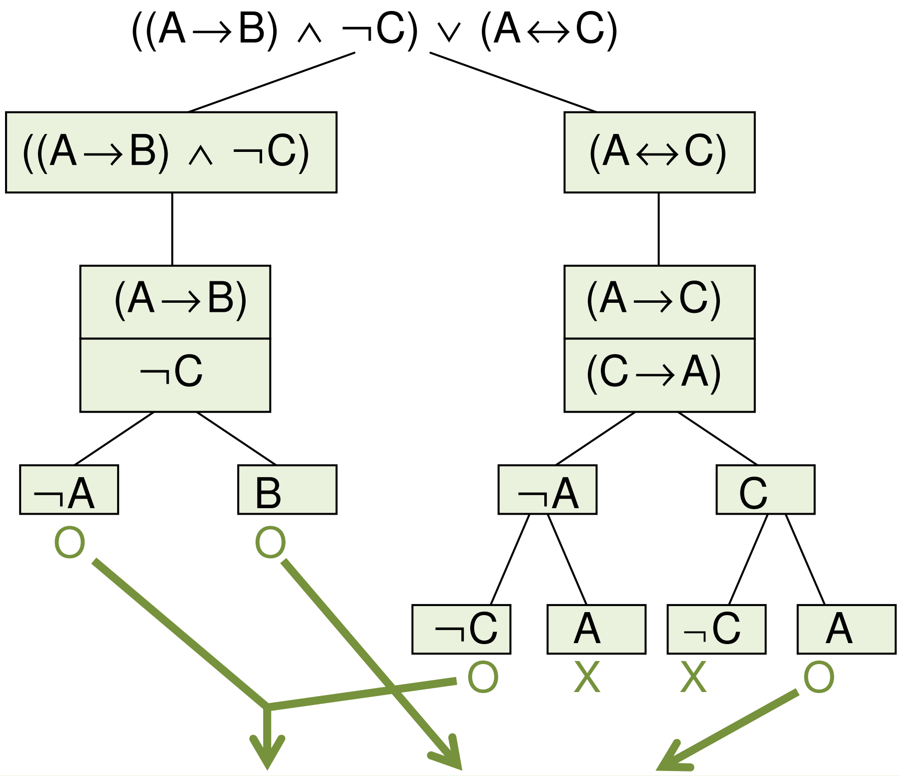


(geht auch mit anderen Resolventen/ anderem Teil des Resolutionsgraphen)

Z6 AL-Tableaux

Bestimmen Sie <u>mit der Tableaumethode</u> eine DNF der AL-Formel
$((A \rightarrow B) \wedge \neg C) \vee (A \leftrightarrow C)$.
Kennzeichnen Sie die abgeschlossenen Blätter mit X und die offenen mit O.
Verwenden Sie die offenen Blätter für die Dualklauseln.
Sie können die DNF-Formel wahlweise in Junktoren- oder Mengenschreibweise angeben.

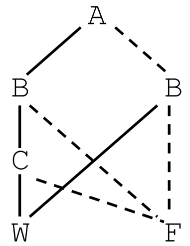
Füllen Sie dazu den untenstehenden Baum aus.



Antwort: $\{ \{\neg A, \neg C\}, \{B, \neg C \}, \{A,C\} \}$

Z7 BDDs

Eine Formel X hat folgenden ROBDD für die Abfragereihenfolge A-B-C:
Durchgezogen ——— : W Gestrichelt - - - - - : F



Konstruieren Sie einen ROBDD der Formel X für die Abfragereihenfolge B-C-A, und zwar in folgenden Schritten:

1. Schritt: Wahrheitswerteverlauf aufschreiben:

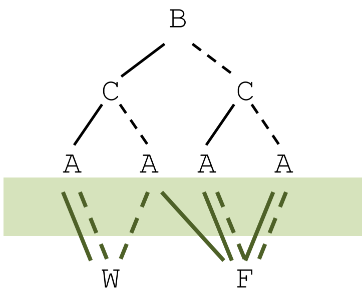
A	B	C	X
W	W	W	**W**
W	W	F	**F**
W	F	W	**F**
W	F	F	**F**

A	B	C	X
F	W	W	**W**
F	W	F	**W**
F	F	W	**F**
F	F	F	**F**

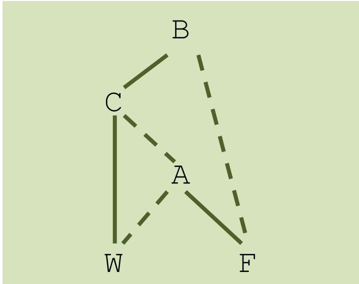
2. Schritt: Denselben Wahrheitswerteverlauf, aber für die Abfragereihenfolge B-C-A, aufschreiben (analog zu 1).

B	C	A	X
W	W	W	**W**
W	W	F	**W**
W	F	W	**F**
W	F	F	**W**
F	W	W	**F**
F	W	F	**F**
F	F	W	**F**
F	F	F	**F**

3. Schritt: Diesen Wahrheitswerteverlauf als OBDD (für B-C-A) aufzeichnen (bitte vervollständigen).



4. Schritt: Grafische Reduktionsschritte durchführen.
Kurzversion, bitte nachzeichnen: Zählt man von links die C's als C1 und C2 und die A's als A1 bis A4, so können übersprungen werden: A1, A3, A4, dann C2. Alternativ können A3 und A4 vor dem Überspringen noch zu einem A34 verschmolzen werden.
Es ergibt sich (so oder so) der ROBDD:



Z8 Werkzeugkasten-Kalkül

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis mit „unserem Werkzeugkasten". Es sind die fehlenden Begründungen einzutragen.

Zeige $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$

(1)	| $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$	Ann
	| Zeige $B \vee C$	
(2)	| | $\neg(B \vee C)$	Ann
(3)	| | $\neg B$	2,NOB
(4)	| | $\neg C$	2,NOB
(5)	| | $A \vee B$	1, UB
(6)	| | A	3, 5, OB
(7)	| | $\neg A \vee C$	1, UB
(8)	| | $\neg A$	4, 7, OB
(9)	| | $\perp$	6, 8, WE
(10)	| $B \vee C$	IB
(11)	$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C)$	BB

Z9 Werkzeugkasten-Kalkül

Vervollständigen Sie den folgenden Beweis für eine Folgerung
a) mit einem indirekten Beweis
b) mit einem direkten Beweis (natürlich ohne darin versteckten indirekten Beweis)

a)

(1)	$A \vee B$	Geg.
(2)	$A \to C$	Geg.
(3)	$C \vee \neg B$	Geg.
	Zeige C	
(4)	| $\neg C$	Ann.
(5)	| $\neg B$	3,4,OB1
(6)	| A	1,5,OB1
(7)	| C	2,6,MP
(8)	| $\perp$	4,7, WE
(9)	C	IB

b)

(1)	$A \vee B$			Geg.	
(2)	$A \to C$			Geg.	
(3)	$C \vee \neg B$			Geg.	
	Zeige C				
	|	Zeige $B \to C$			
(4)	|	|	B	Ann.	
(5)	|	|	$\neg\neg B$	4, NE	
(6)	|	|	C	3,5,OB1	
(7)	|	$B \to C$		BB	
(8)	|	C		1,2,7,OB2	← Zeile entbehrlich, aber Begründung
	|				dann in Folgezeile ↓ verschieben
(9)	C			DB	

Z10 AL-Werkzeuge I, gemischt

A, B und C werden verdächtigt, einen Einbruch begangen zu haben. Man findet heraus:

(1) Niemand außer A, B und C kann beteiligt gewesen sein.
(2) A „arbeitet" nie ohne Komplizen.
(3) C ist unschuldig.

Man formalisiere dieses Wissen und entscheide

a) mit Tableau,
b) mit Werkzeugkasten,

ob B schuldig oder unschuldig ist.

Lösung Z10(a)

X :⇔ X ist schuldig
Wir reden einfach nicht über andere als A,B,C; sonst brauchen wir für (1) PL1.

a1) DNF für 1+2+3 per Tableau suchen. (evtl. vorzeitig mit *usw* abkürzen)

```
         A∨B∨C
       A→(B∨C)
          ¬C
       /   |   \
      A    B    C
     / \  usw   x
   ¬A   B∨C
    x   / \
       B   C
           x
```

In allen Alternativen (Dualklauseln) der DNF gilt B (natürlich auch in den widersprüchlichen). Also folgt aus der Formelmenge B.

a2) 1+2+3+¬B per Tableau als unerfüllbar erkennen:

```
         A∨B∨C
       A→(B∨C)
          ¬C
          ¬B
       /   |   \
      A    B    C
     / \   x    x
   ¬A   B∨C
    x   / \
       B   C
       x   x
```

Fast genauso, nur incl. ¬B. Nun sind alle Zweige abgeschlossen – widersprüchlich. Also folgt aus der Formelmenge B.

Lösung Z10(b)

Beispiel eines Werkzeugkastenbeweises für {1,2,3} |= B

```
1    (A∨B)∨C        Geg
2    A →(B∨C)       Geg
3    ¬C             Geg
     Zeige B
4    |  ¬B          Ann
5    |  A∨B         OB,1,3
6    |  A           OB,4,5
7    |  B∨C         MP,2,6
8    |  B           OB,3,7
9    |  ⊥           WE,4,8
10   B              IB
```

Z11 AL-Werkzeuge II, gemischt

Auf einer Burg, die ausschließlich von Rittern und Knappen bewohnt ist, sagen Ritter immer die Wahrheit, und Knappen lügen immer. Ein Burgbewohner zeigt auf einen anderen und sagt: „Der ist kein Knappe, aber ich bin einer." Was ist der, auf den er zeigte – Ritter oder Knappe?

a) Stellen Sie Wissen und Frage als AL-Formeln dar.

Beweisen Sie die Antwort mit

b) Resolution,

c) Wahrheitstafel.

Lösung Z11(a)

Aussagevariablen:	A – Der Redende ist Ritter.	(¬A – … ist Knappe)
(+ Wissen)	B – Der andere ist Ritter.	(¬B – … ist Knappe)
Wissen:	Redender sagt Wahrheit ⇔ A	
	Aussage des Redenden: $\neg A \wedge B$	
also:	$A \leftrightarrow (\neg A \wedge B)$	
Frage:	B?	
geratene Antwort:	$\neg B$	

Lösung Z11(b)

Per Resolution zu widerlegen: $(A \leftrightarrow (\neg A \wedge B)) \wedge B$

zunächst syntaktische Umformung:

→ $(A \rightarrow (\neg A \wedge B)) \wedge ((\neg A \wedge B) \rightarrow A) \wedge B$

→ $(\neg A \vee (\neg A \wedge B)) \wedge (\neg(\neg A \wedge B) \vee A) \wedge B$

→ $(\neg A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg\neg A \vee \neg B \vee A) \wedge B$

→ $(\neg A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee A) \wedge B$ (KNF)

{¬A,B} {¬A} {A,¬B} {B}

{A}

∅

Lösung Z11(c)

A	B	¬A	¬A∧B	A↔(¬A∧B)	(A ↔ (¬A∧B)) ∧ B
W	W	F	F	F	F
W	F	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F

Z12 PL1

Formalisieren Sie in PL1 (Universum? Relationen?):

a) Keiner mag mich.
b) Jemand mag mich.
c) Alle mögen mich.
d) Ich mag niemanden, der Dich mag.
e) Alle Wege führen nach Rom.
f) Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
g) The first cut is the deepest.
h) Wer A sagt muss auch B sagen.
i) Hunde, die bellen, beißen nicht.
j) Das letzte Hemd hat keine Taschen.

Lösung Z12

a) z.B. U=Personen / i=ich / d=du / M(x,y)=„x mag y“
$\neg\exists x M(x,i)$
b) $\exists x M(x,i)$
c) $\forall x M(x,i)$
d) $\forall x(M(x,d) \to \neg M(i,x))$ bzw. $\neg\exists x(M(x,d) \wedge M(i,x))$
e) z.B. U=Wege und Orte / W(x)= „x ist Weg“ / F(x,y)=„Weg x führt nach Ort y“ / r=Rom
$\forall x(W(x) \to F(x,r))$
f) z.B. U=Personen und Gruben / G(x,y)=„Person x gräbt Grube y“ / F(x,y)=„Person x fällt in Grube y“
$\forall x \forall y(G(x,y) \to F(x,y))$
g) z.B. U=Schnitte, die Folge bilden / V(x,y)= „x wurde vor y erzeugt“ / T(x,y)=„x ist mindestens so tief wie y“
$\forall x(\neg\exists y V(y,x) \to \forall z T(x,z))$
h) z.B. U=Personen und Texte / S(x,y)=„Person x sagt Text y“ / M(x,y)=„Person x muss Text b sagen“ / a=Text A, b=Text B
$\forall x(S(x,a) \to M(x,b))$
[oder mit modaler Prädikatenlogik mit sagen, sagen müssen, sagen dürfen etc.]
i) z.B. U=Hunde / W(x)= „x bellt“ / B(x)= „x beißt“
$\forall x(W(x) \to \neg B(x))$
j) z.B. U=Hemden, die eine endliche Folge des Getragenwerdens bilden, und Taschen (als Hemdenteile) / N(x,y)= „Hemd x wird *nach* Hemd y getragen“ / H(x,y)=„Hemd x hat Tasche y“
$\forall x(\neg\exists y N(y,x) \to \neg\exists z H(x,z))$

Z13 PL1

Angenommen, Sie wollen beweisen, dass im Universum der Lebewesen aus den Aussagen

1. Alle Hunde heulen nachts.
2. Wer mindestens eine Katze hat, hat keine Maus.
3. Wer ein Lebewesen hat, das nachts heult, der schläft nicht gut.
4. Aron hat eine Katze oder einen Hund (oder beides).

folgt:

5. Wenn Aron gut schläft, dann hat er keine Mäuse.

Vollziehen Sie dazu den ersten Schritt, indem Sie (1) bis (5) als PL1-Formeln schreiben, und zwar mit

a	für Aron
H(x)	für „x ist **H**und“,
K(x)	für „x ist **K**atze“,
M(x)	für „x ist **M**aus“,
N(x)	für „x heult **n**achts“,
B(x,y)	für „x hat (**b**esitzt) y“
S(x)	für „x schläft gut“

(1) $\forall x \; (H(x) \rightarrow N(x))$

(2) $\forall x \; (\exists y \, (K(y) \wedge B(x,y)) \rightarrow$
$\neg\exists z \, (M(z) \wedge B(x,z)))$

(3) $\forall x \; (\exists y \, (N(y) \wedge B(x,y)) \rightarrow \neg S(x))$

(4) $\exists z \, (B(a,z) \wedge (K(z) \vee H(z)))$

(5) $S(a) \rightarrow \neg\exists z \, (M(z) \wedge B(a,z))$

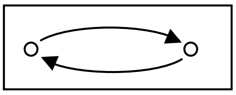
Tipp: Prüfen Sie am Ende nochmal die Klammerung.

Z14 PL1-Semantik

Zeigen Sie, dass ...

(a) φ: $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$ nicht allgemeingültig ist;

Tipps: zu a: Verwenden Sie als Interpretation eine Menge M und eine Relation R auf M, die φ falsch macht, beispielsweise die natürlichen Zahlen mit einer (welcher?) bekannten einfachen Relation,

oder lassen Sie sich von dem Bild  inspirieren.

(b) die Folgerung $\neg\exists y \forall x R(x, y) \models \neg\forall x \exists y R(x, y)$ falsch ist;

(c) die Formelmenge $\{\forall x \exists y R(x, y), \forall y \neg\forall x R(x, y)\}$ erfüllbar ist.

Tipps zu b,c: Verwenden Sie (a).

Lösung Z14(a)

Gegenbeispiel 1: Knotenmenge: nat.Z., R(x,y) sei z.B. x<y. Zu jeder nat. Zahl x gibt es eine echt größere Zahl y. Es gibt aber keine nat. Zahl y die echt größer als alle anderen ist: z.B. gilt ¬(y<y).
Gegenbeispiel 2: siehe Bild, Universum=Punkte. R(x,y) sei: x→y. Aber kein Punkt y wird von Pfeilen von beiden Punkten aus getroffen.

Lösung Z14(b)

Die Folgerung $\neg\exists y \forall x R(x, y) \models \neg\forall x \exists y R(x, y)$ ist falsch:
Wäre $\neg\exists y \forall x R(x, y) \models \neg\forall x \exists y R(x, y)$ richtig,
dann $\neg\exists y \forall x R(x, y) \to \neg\forall x \exists y R(x, y)$ allgemeingültig,
dann $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$ allgemeingültig
(Kontraposition und doppelte Negation weglassen) – ist es aber nicht, siehe (a).

Lösung Z14(c)

Die Formelmenge $\{\forall x \exists y R(x, y), \forall y \neg\forall x R(x, y)\}$ ist erfüllbar:
Wäre wäre sie unerfüllbar,
dann wäre $\forall x \exists y R(x, y) \to \neg\forall y \neg\forall x R(x, y)$ allgemeingültig.
Es ist aber $\neg\forall y \neg\forall x R(x, y) \equiv \exists y \forall x R(x, y)$, und wir erhielten dann
über $\neg\exists y \forall x R(x, y) \to \neg\forall x \exists y R(x, y)$ wieder einen Widerspruch zu (a).

Z15 PL1-Tableaux

Zeigen Sie, dass $\forall x \exists y R(x,y) \vee \exists u \forall v \neg R(u,v)$ allgemeingültig ist, indem Sie per Tableau zeigen, dass die Negation davon widersprüchlich ist.
Hinweis: Bitte ...

- Formeln nummerieren,
- jeweils Prämissennummer und bei Quantifizierung Tableauregel dazuschreiben,
- in geschlossenen Zweigen widersprüchliche Literale umrahmen

Lösung Z15

(1)	$\neg[\forall x \exists y R(x,y) \vee \exists u \forall v \neg R(u,v)]$	
(2)	$\neg \forall x \exists y R(x,y)$	1
(3)	$\neg \exists u \forall v \neg R(u,v)$	1
(4)	$\neg \exists y R(c,y)$	(W–) 2
(5)	$\neg \forall v \neg R(c,v)$	(Sp–) 3
(6)	$\neg\neg R(c,d)$	(W–) 5
(7)	$\boxed{R(c,d)}$	6
(8)	$\boxed{\neg R(c,d)}$	(Sp–) 4

Z16 PL1-Normalformen

Gesucht ist jeweils eine erfüllbarkeitsäquivalente – nicht unbedingt äquivalente – Formel:

(a) Bringen Sie $\forall z \exists y[p(y,g(y),z) \vee \neg \forall x Q(x)] \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x,z),z)$ in BPNF.

Lösung Z16(a)

wenn-dann-frei? OK

bereinigen → $\forall z \exists y[P(y,g(y),z) \vee \neg \forall x Q(x)] \wedge \neg \forall u \exists v \neg R(f(v,u),u)$

Negationen nach innen bringen →

$\forall z \exists y[P(y,g(y),z) \vee \exists x \neg Q(x)] \wedge \exists u \forall v \neg\neg R(f(v,u),u)$

Quantoren vor die Disjunktion →

$\forall z \exists y \exists x[P(y,g(y),z) \vee \neg Q(x)] \wedge \exists u \forall v \neg\neg R(f(v,u),u)$

Quantoren vor die Konjunktion →

$\forall z \exists y \exists x \exists u \forall v\{\,[P(y,g(y),z) \vee \neg Q(x)] \wedge \neg\neg R(f(v,u),u)\,\}$

(b) Bringen Sie $\forall x \exists y \forall z \exists u \forall v \exists w R(x,y,z,u,v,w)$ in Skolem-Form.

Lösung Z16(b)

→ $\forall x \forall z \exists u \forall v \exists w R(x,f(x),z,u,v,w)$

→ $\forall x \forall z \forall v \exists w R(x,f(x),z,g(x,z),v,w)$

→ $\forall x \forall z \forall v R(x,f(x),z,g(x,z),v,h(x,z,v))$

(c) Bringen Sie $\forall z \exists y[P(y,g(y),z) \vee \neg \forall x Q(x)] \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x,z),z)$ in Kl-NF

Lösung Z16(c)

BPNF erledigt s.o. (a)

Skolemisierung → $\forall z \forall u\{[P(i(z),g(i(z)),z) \vee \neg Q(j(z))] \wedge R(f(u,k(z)),k(z))\}$

KlNF erledigt, in Mengenschreibweise →

$\{\,\{P(i(z),g(i(z)),z),\neg Q(j(z))\},\{R(f(u,k(z)),k(z))\}\,\}$

Z17 Unifikation

Bestimmen Sie (wenn möglich) den allgemeinsten Unifikator von
$\{\ \neg R(f(x,g(c,y)),h(x)),\ \neg R(f(f(u,v),w),h(f(c,d)))\ \}$.

Lösung Z17

$\{\ \neg R(f(x,g(c,y)),h(x)),\ \neg R(f(f(u,v),w),h(f(c,d)))\ \}$ s = [/]
erste Unterschiede: x – f(u,v) ← enthält kein x s := s ∘ [x /f(u,v)]
$\{\ \neg R(f(f(u,v),g(c,y)),h(f(u,v))),\ \neg R(f(f(u,v),w),h(f(c,d)))\ \}$
erste Unterschiede: w – g(c,y) ← enthält kein w s := s ∘ [w/g(c,y)]
$\{\ \neg R(f(f(u,v),g(c,y)),h(f(u,v))),\ \neg R(f(f(u,v),g(c,y)),h(f(c,d)))\ \}$
analog s := s ∘ [u/c] ∘ [v/d]
$\{\ \neg R(f(f(c,d),g(c,y)),h(f(c,d)))\ \}$
1-elementig, fertig: s = [x /f(u,v)] ∘ [w/g(c,y)] ∘ [u/c] ∘ [v/d]
= [x,w,u,v / f(u,v),g(c,y),c,d]

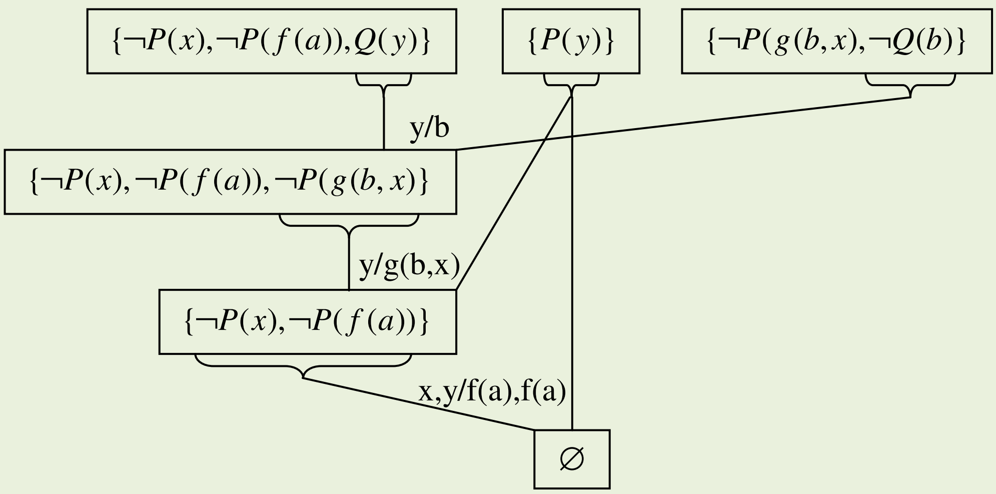
Z18 Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die PL1-Klauselmenge
$\big\{\{\neg P(x),\neg P(f(a)),Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg P(g(b,x)),\neg Q(b)\}\big\}$
unerfüllbar ist.
Welche unerfüllbare geschlossene PL1-Formel entspricht der Kl-NF-Menge?

Lösung Z18

$\big\{\{\neg P(x),\neg P(f(a)),Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg P(g(b,x),\neg Q(b)\}\big\}$
Kl 1 Kl 2 Kl 3
Wir unifizieren Q(y) und Q(b) mittels [y/b] & resolvieren damit Kl 1 und 3 zu ...
Kl 4: $\{\neg P(x),\neg P(f(a)),\neg P(g(b,x)\}$
Wir unifizieren P(y) und P(g(b,x)) mittels [y/ g(b,x)] & resolvieren damit Kl 2 und 4 zu ...
Kl 5: $\{\neg P(x),\neg P(f(a))\}$
Wir unifizieren P(y), P(f(a)) & P(x) per [x,y / f(a),f(a)] & resolvieren damit Kl 2 und 5 zu ...
Kl 6: ∅, also {Kl 1, Kl 2, Kl 3} unerfüllbar.
(geht auch in kleineren Schritten)

Oder Graphisch:



Mögliche Ausgangsformel:
$\forall x \forall y\, [(\neg P(x) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(y) \wedge (\neg P(g(b,x) \vee \neg Q(b))\,]$

Z19 PL1-Werkzeugkasten

Zeigen Sie mithilfe des **PL1-Werkzeugkasten**, dass
$[\exists xP(x) \vee \neg\forall yQ(y)] \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$ allgemeingültig ist.
Verwenden Sie das untenstehende Schema und füllen Sie nur noch die jeweiligen Begründungen ein.

	Zeige $[\exists xP(x) \vee \neg\forall yQ(y)] \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$	
1	| $\exists xP(x) \vee \neg\forall yQ(y)$	**Ann**
	| Zeige $\exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$	
2	| | $\neg\exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$	**Ann**
3	| | $\forall x\neg(Q(x) \rightarrow P(x))$	**2,NEB**
	| | Zeige $\neg\exists xP(x)$	
4	| | | $\exists xP(x)$	**Ann**
5	| | | $P(a)$	**4,EB**
6	| | | $\neg(Q(a) \rightarrow P(a))$	**3,Sp**
7	| | | $Q(a) \wedge \neg P(a)$	**6,NFB**
8	| | | $\neg P(a)$	**7,UB**
9	| | | $\bot$	**5,8,WE**
10	| | $\neg\exists xP(x)$	**IB**
11	| | $\neg\forall yQ(y)$	**1,10,OB**
12	| | $\exists y\neg Q(y)$	**11,NAB**
13	| | $\neg Q(b)$	**12,EB**
14	| | $\neg(Q(b) \rightarrow P(b))$	**3,Sp**
15	| | $Q(b) \wedge \neg P(b)$	**14,NFB**
16	| | $Q(b)$	**15,UB**
17	| | $\bot$	**13,16,WE**
18	| $\exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$	**IB**
19	$[\exists xP(x) \vee \neg\forall yQ(y)] \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$	**BB**

Z20 PL1-Werkzeugkasten, nat. Sprache

Beweisen Sie die folgenden Folgerungen, indem Sie die Aussagen in PL1 wiedergeben und den PL1-Werkzeugkasten anwenden:

a) (1) Wenn es regnet ist die Erde nass.
(2) Letzten Monat hat es an mindestens einem Tag geregnet.
(3) Also war letzten Monat an mindestens einem Tag die Erde nass.

b) (1) Wenn es regnet ist die Erde nass.
(2) Es regnete letzten Monat jeden Tag.
(3) Also war letzten Monat jeden Tag die Erde nass.

Tipps: Das Universum besteht z.B. aus den Tagen des letzten Monats.
Formen Sie (1) um in eine Aussage über die Objekte des Universums!

Lösung Z20

$R(x)$: Es regnet am Tag x.
$N(x)$: Die Erde ist am Tag x nass.

Lösung Z20 (a) (Rest)

(1)	$\forall x(R(x) \to N(x))$	Geg.
(2)	$\exists x R(x)$	Geg.
	Zeige $\exists x N(x)$	
(3)	$\mid R(a)$	2,EB
(4)	$\mid R(a) \to N(a)$	1,Sp
(5)	$\mid N(a)$	3,4,MP
(6)	$\mid \exists x N(x)$	5,EE
(7)	$\exists x N(x)$	DB

Lösung Z20 (b) (Rest)

(1)	$\forall x(R(x) \to N(x))$	Geg.
(2)	$\forall x R(x)$	Geg.
	Zeige $\forall x N(x)$	
(3)	$\mid$ Zeige $N(a)$	
(4)	$\mid \mid R(a) \to N(a)$	1,Sp
(5)	$\mid \mid R(a)$	2,Sp
(6)	$\mid \mid N(a)$	4,5,MP
(7)	$\mid N(a)$	DB
(8)	$\forall x N(x)$	AB

Z21 PL1-Werkzeuge

a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen als PL1-Formeln:

i) Jeder Drache ist zufrieden, wenn alle seine Kinder fliegen können.
ii) Grüne Drachen können fliegen.
iii) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
iv) Alle grünen Drachen sind zufrieden.

Zeigen Sie mit

PL1-Werkzeugkasten,
Resolution,
Tableaubaum,

dass aus den Aussagen (i)-(iii) die Aussage (iv) folgt.

Tipp: Es geht nur um Drachen; also braucht man nicht das Prädikat, Drache zu sein.

Lösung Z21(a)

$K(x,y)$:	x ist Kind von y.
$F(x)$:	x kann fliegen.
$Z(x)$:	x ist zufrieden.
$G(x)$:	x ist grün.
(i)	$\forall x(\forall y(K(y,x) \to F(y))) \to Z(x))$
(ii)	$\forall x(G(x) \to F(x))$
(iii)	$\forall x(\exists y(K(x,y) \wedge G(y)) \to G(x))$
(iv)	$\forall x(G(x) \to Z(x))$

Lösung Z21(b)

1	$\forall x(\forall y(K(y,x) \to F(y)) \to Z(x))$	Geg
2	$\forall x(G(x) \to F(x))$	Geg
3	$\forall x(\exists y(K(x,y) \wedge G(y)) \to G(x))$	Geg
	Zeige $\forall x(G(x) \to Z(x))$	
	Zeige $G(a) \to Z(a)$	
4	$G(a)$	Ann
5	$\forall y(K(y,a) \to F(y)) \to Z(a)$	Sp, 1
	Zeige $\forall y(K(y,a) \to F(y))$	
	Zeige $K(b,a) \to F(b)$	
6	$K(b,a)$	Ann
7	$\exists y(K(b,y) \wedge G(y)) \to G(b))$	Sp, 3
8	$K(b,a) \wedge G(a)$	UE, 4,6
9	$\exists y(K(b,y) \wedge G(y))$	EE, 8
10	$G(b)$	MP, 7,9
11	$G(b) \to F(b)$	Sp, 2
12	$F(b)$	MP, 10,11
13	$K(b,a) \to F(b)$	BB
14	$\forall y(K(y,a) \to F(y))$	AB
15	$Z(a)$	MP, 5,14
16	$G(a) \to Z(a)$	BB
17	$\forall x(G(x) \to Z(x))$	AB

Lösung Z21(c)

Resolution für

$\forall x(\forall y(K(y,x) \to F(y)) \to Z(x)) \;\wedge\; \forall x(G(x) \to F(x)) \;\wedge$

$\quad \forall x(\exists y(K(x,y) \wedge G(y)) \to G(x)) \;\wedge\; \neg \forall x(G(x) \to Z(x)):$

Beseitigung der Implikationen →

$\forall x(\neg\forall y(\neg K(y,x) \vee F(y)) \vee Z(x)) \;\wedge\; \forall x(\neg G(x) \vee F(x)) \;\wedge$

$\quad \forall x(\neg\exists y(K(x,y) \wedge G(y)) \vee G(x)) \;\wedge \neg \forall x(\neg G(x) \vee Z(x)):$

Bereinigung →

$\forall x(\neg\forall y(\neg K(y,x) \vee F(y)) \vee Z(x)) \;\wedge\; \forall z(\neg G(z) \vee F(z)) \;\wedge$

$\quad \forall u(\neg\exists v(K(u,v) \wedge G(v)) \vee G(u)) \;\wedge \neg \forall w(\neg G(w) \vee Z(w))$

Negationen bis an die atomaren Aussagen nach innen bringen →

$\forall x(\exists y(K(y,x) \wedge \neg F(y)) \vee Z(x)) \;\wedge\; \forall z(\neg G(z) \vee F(z)) \;\wedge$

$\quad \forall u(\forall v(\neg K(u,v) \vee \neg G(v)) \vee G(u)) \;\wedge\; \exists w(G(w) \wedge \neg Z(w))$

Quantoren nach vorne bringen (pränex machen) →

$\forall x \exists y \forall z \forall u \forall v \exists w\, [((K(y,x) \wedge \neg F(y)) \vee Z(x)) \;\wedge\; (\neg G(z) \vee F(z)) \;\wedge$

$\quad ((\neg K(u,v) \vee \neg G(v)) \vee G(u)) \;\wedge\; (G(w) \wedge \neg Z(w))\,]$

Skolemisierung →

$\forall x \forall z \forall u \forall v\, [((K(f(x),x) \wedge \neg F(f(x))) \vee Z(x)) \;\wedge\; (\neg G(z) \vee F(z)) \;\wedge$

$\quad ((\neg K(u,v) \vee \neg G(v)) \vee G(u)) \;\wedge\; (G(g(x,z,u,v)) \wedge \neg Z(g(x,z,u,v)))\,]$

in KlNF bringen, Allquantoren sparen →

$((K(f(x),x) \vee Z(x)) \wedge (\neg F(f(x)) \vee Z(x))) \;\wedge\; (\neg G(z) \vee F(z)) \;\wedge$

$\quad ((\neg K(u,v) \vee \neg G(v)) \vee G(u)) \;\wedge\; (G(g(x,z,u,v)) \wedge \neg Z(g(x,z,u,v)))$

in KlNF-Mengenform →

$\{\, \{K(f(x),x), Z(x)\}, \{\neg F(f(x)), Z(x)\}\;, \{\neg G(z), F(z)\},$

$\quad \{\neg K(u,v), \neg G(v), G(u)\}\,, \{G(g(x,z,u,v))\}, \{\neg Z(g(x,z,u,v))\}\,\}$

Variablen wieder separiert und Klauseln in Listenform →

1. $\{K(f(r),r), Z(r)\}$
2. $\{\neg F(f(s)), Z(s)\}$
3. $\{\neg G(t), F(t)\}$
4. $\{\neg K(p,q), \neg G(q), G(p)\}$
5. $\{G(g(x,z,u,v))\}$
6. $\{\neg Z(g(x,z,u,v))\}$

Resolutionsschritte ergeben folgende neue Knoten:

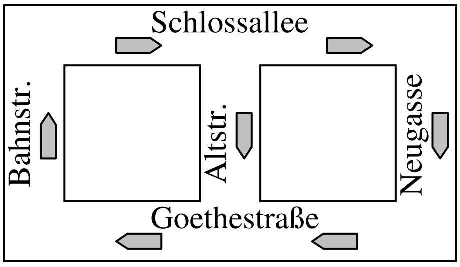
7.	$\{\neg F(f(g(x,z,u,v)))\}$	aus 2, 6, $[\,s\,/\,g(x,z,u,v)\,]$
8.	$\{K(f(g(x,z,u,v)), g(x,z,u,v))\}$	aus 1, 6, $[\,r\,/\,g(x,z,u,v)\,]$
9.	$\{\neg G(f(g(x,z,u,v)))\}$	aus 3, 7, $[\,t\,/\,f(g(x,z,u,v))\}\,]$
10.	$\{\neg K(f(g(x,z,u,v)),q), \neg G(q)\}$	aus 4, 9, $[\,p\,/\,f(g(x,z,u,v))\}\,]$
11.	$\{\neg G(g(x,z,u,v))\}$	aus 8, 10, $[\,q\,/\,g(x,z,u,v)\,]$
12.	$\{\,\}$	aus 5, 11

Lösung Z21(d)

(i) $\forall x(\forall y(K(y,x) \to F(y))) \to Z(x))$		
(ii) $\forall x(G(x) \to F(x))$		
(iii) $\forall x(\exists y(K(x,y) \wedge G(y)) \to G(x))$		
(iv) $\neg \forall x(G(x) \to Z(x))$		
(v) $\neg (G(a) \to Z(a))$		W-,iv
(vi) $G(a)$		v
(vii) $\neg Z(a)$		v
(viii) $\forall y(K(y,a) \to F(y))) \to Z(a)$		Sp+,i
(ix) $\neg\forall y(K(y,a) \to F(y)))$	(x) $Z(a)$	viii
(xi) $\neg(K(b,a) \to F(b))$		W-,ix
(xii) $\exists y(K(b,y) \wedge G(y)) \to G(b)$		Sp+,iii
(xiii) $\neg\exists y(K(b,y) \wedge G(y))$	(xiv) $G(b)$	xii
(xv) $\neg(K(b,a) \wedge G(a))$		Sp-,xiii
(xvi) $\neg(K(b,a)$ — (xvii) $\neg G(a)$		xv
(xviii) $G(b) \to F(b)$	(xix) $G(b) \to F(b)$	Sp+,ii
(xx) $\neg G(b)$ — (xxi) $F(b)$	(xxii) $\neg G(b)$ — (xxiii) $F(b)$	xviii/xix
(xxiv) $(K(b,a)$ — (xxv) $(K(b,a)$	(xxvi) $(K(b,a)$	xi
(xxvii) $\neg F(b)$ — (xxviii) $\neg F(b)$	(xxix) $\neg F(b)$	xi

Z22 Modallogik

In Modalstadt gibt es 6 Kreuzungen bzw. Ecken und 5 Straßen, allesamt Einbahnstraßen, siehe Stadtplan:



Es gibt drei Kneipen (Ecke Bahn/Schloss, Schloss/Neu und Alt/Goethe), vier Handyläden (Ecke Goethe/Bahn, Schloss/Alt, Alt/Goethe und Neu/Goethe), zwei Boutiquen (Ecke Bahn/Schloss und Schloss/Neu) und eine S-Bahn-Haltestelle (Ecke Bahn/Schloss).

Die Bürger interessieren sich nur für die Existenz und die Erreichbarkeit ihrer Einrichtungen über eine Anzahl Blocks/Straßenzüge von Ecke/Kreuzung zu Ecke/Kreuzung, und zwar mit dem Auto, d.h. in Richtung der Einbahnstraßen.

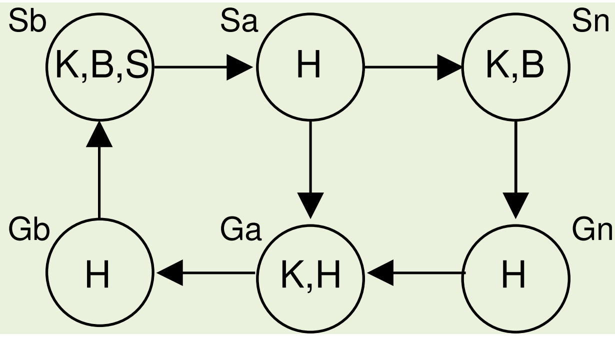
1. Formalisieren Sie Modalstadt als Kripke-Struktur (Rah, Bel), Rah = (K,R), K = (Sb, Sa, Sn, Gb, Ga, Gn) [Anfangsbuchstaben der beiden sich treffenden Straßen!]

R = { (Sb,Sa), (Sa,Sn), (Sa,Ga), (Sn,Gn), (Gn,Ga), (Ga,Gb), (Gb,Sb) }

Aussagevariablen: K, H, B, S, *K~Es gibt eine **K**neipe an dieser Ecke, usw.*

Bel(Sb) = K, B, S	Bel(Sa) = H	Bel(Sn) = K, B
Bel(Gb) = H	Bel(Ga) = K, H	Bel(Gn) = H

Grafisch:



2. Schreiben sie Modalformeln für folgende Aussagen (und jeweils in welchen Situationen sie gelten):

   a) Es gibt einen Block weiter einen Handyladen.
   Formel: $\Diamond H$ gilt in: Sb, Sa, Sn, Ga, Gn

   b) Wenn an dieser Ecke eine Kneipe ist, gibt es zwei Blocks weiter garantiert eine Kneipe, egal wie man fährt.
   Formel: $K \rightarrow \Box\Box K$ * gilt in: Sb, Sa, Sn, Ga, Gn, Gb
   *) in allgemeinen Stadtplänen, wo man evtl. nicht immer 2 Blocks weit fahren kann:
   $K \rightarrow (\Box\Box K \wedge \Diamond\Diamond K)$

c) Hier ist eine Kneipe und 1 Block weiter auch.
Formel: $K \wedge \Diamond K$ gilt in: –

d) Wenn es hier einen Handyladen gibt, gibt es hier keine Boutique.
Formel: $H \rightarrow \neg B$ gilt in: Sb, Sa, Sn, Ga, Gn, Gb

e) Es gibt einen Block von hier einen Handyladen oder eine Kneipe.
Formel: $\Diamond(K \vee H)$ / $\Diamond K \vee \Diamond H$ gilt in: Sb, Sa, Sn, Ga, Gn, Gb

f) Wenn hier eine Boutique ist, muss man, wenn man nicht gleich in die eventuell hier gelegene Kneipe gehen will, keine drei Blocks fahren, um zu einer Kneipe zu kommen.
Formel: $B \rightarrow (\Diamond K \vee \Diamond \Diamond K)$ gilt in: Sb, Sa, Sn, Ga, Gn, Gb

Z23 PLTL

Wir betrachten jetzt ausschließlich Folgen von Situationen, in denen genau a oder b gilt, so dass insbesondere $\mathsf{G}(a \leftrightarrow \neg b)$ und für alle anderen Aussagevariablen P gilt: $\mathsf{G}\neg P$.

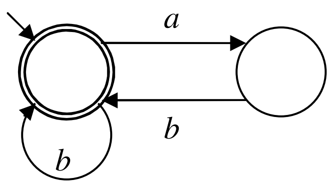
Nun seien wie folgt elf ω-Sprachen (Folgenmengen) über dem Alphabet $\{a,b\}$ definiert – sei es natürlichsprachlich, mit Büchi-Automat, mit PLTL-Formel oder als ω-regulärer Ausdruck:

L_1: Auf jedes a muss unmittelbar ein b folgen.

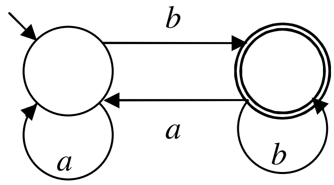
L_2: Auf jedes a muss irgendwann ein b folgen.

L_3: Es muss immer wieder einmal ein b kommen (nie nur noch a's).

L_4:



L_5:



L_6: $(b \mid ab)^\omega$

L_7: $(b^* \mid ab)^\omega$

L_8: $(b \mid a^* b)^\omega$

L_9: $\mathsf{GF}\, b$

L_{10}: $\mathsf{G}(a \rightarrow \mathsf{X}\, b)$

L_{11}: $\neg \mathsf{FG}\, a$

Tragen Sie die Sprachen („L_n“) in die folgenden Kästen so ein, dass gleiche Sprachen im gleichen Kasten stehen und unterschiedliche Sprachen in verschiedenen Kästen. Es kann sein, dass nicht alle Kästen benutzt werden müssen.

L_1 L_4 L_6 L_7 L_{10}

L_2 L_3 L_5 L_8 L_9 L_{11}

Z24 PL1, nat. Sprache, Resolution

Wir betrachten folgende Aussagen, bezogen auf das Universum der Menschen:

1. Jeder, der Junge oder Mädchen ist, ist ein Kind.
2. Alle Kinder bekommen eine Puppe, eine Eisenbahn oder ein Logikbuch.
3. Kein Junge bekommt eine Puppe.
4. Kein braves Kind bekommt ein Logikbuch.
5. Wenn kein Kind eine Eisenbahn bekommt, dann ist kein Junge brav.

a) Übersetzen Sie die fünf Aussagen in geschlossene PL1-Formeln (1) bis (5), wobei
J(x), M(x), K(x), B(x) bedeutet x ist **J**unge, **M**ädchen, **K**ind bzw. **b**rav.
P(x), E(x), L(x) bedeutet x bekommt ein(e) **P**uppe, **E**isenbahn bzw. **L**ogikbuch.

(1) $\forall x[(J(x)\vee M(x))\to K(x)]$
(2) $\forall x[(K(x)\to(P(x)\vee E(x)\vee L(x))]$
(3) $\neg\exists x[J(x)\wedge P(x)]$
(4) $\neg\exists x[K(x)\wedge B(x)\wedge L(x)]$
(5) $\neg\exists x[K(x)\wedge E(x)] \to \neg\exists x[J(x)\wedge B(x)]$

b) Übersetzen Sie jede der Formeln (1 bis 4) und die Negation von (5) in Mengen-Klauselnormalform mit getrennten Variablen, ggf. mit Konstanten und Funktionen vom Skolemisieren.

(1a,b)	$\{ \{\neg M(u),K(u)\}, \{\neg J(v),K(v)\} \}$
(2)	$\{ \{\neg K(w), P(w), E(w), L(w)\} \}$
(3)	$\{ \{\neg J(x),\neg P(x)\} \}$
(4)	$\{ \{\neg K(y), \neg B(y), \neg L(y)\} \}$
(5(neg.)a,b,c)	$\{ \{\neg K(z),\neg E(z)\}, \{J(a)\}, \{B(a)\} \}$ (jeweils $\ldots_{KINF}$)

c) Beweisen Sie mittels PL1-Resolution, dass

$$(1)\wedge(2)\wedge(3)\wedge(4) \to (5)$$

allgemeingültig ist, d.h. dass (1)∧(2)∧ (3)∧(4)∧¬(5) unerfüllbar ist, d.h. dass aus der der Menge aller Klauselmengen aus (b) mit Resolutionsschritten (incl. Unifikation) die leere Klausel gefolgert werden kann.

1b,5b:	¬Jv,Kv	& Ja	→ Ka	(6)
3,5b:	¬Jx,¬Px	& Ja	→ ¬Pa	(7)
5a,6:	¬Kz,¬Ez	& Ka	→ ¬Ea	(8)
2,8:	¬Kw,Pw,Ew,Lw	& ¬Ea	→ ¬Ka,Pa,La	(9)
9,7:	¬Ka,Pa,La	& ¬Pa	→ ¬Ka,La	(10)
10,6:	¬Ka,La	& Ka	→ La	(11)
4,11:	¬Ky,¬By,¬Ly	& La	→ ¬Ka,¬Ba	(12)
12,5c	¬Ka,¬Ba	& Ba	→ ¬Ka	(13)
13,6	¬Ka	& Ka	→ ∅	