Gliederung der Vorlesung

Alphabete / Zeichenketten / Sprachen

▶ Alphabet

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Zeichen (Symbolen).

  $\Sigma = \{ a,b,c,\ldots,z \}$; $\Sigma_1 = \{ A,B,C,\ldots,Z \}$; $\Sigma_2 = \{ 0,1,\ldots,9 \}$

▶ Zeichenketten und ihre Länge

- Eine Zeichenkette (ein Wort) ist eine endliche Folge von Zeichen.

  anton (über Σ), 123 (über Σ_2), ACHTUNG (über Σ_1)
  besondere Zeichenkette: ε (das leere Wort)

- Die Länge einer Zeichenkette u ist die Anzahl der Zeichen von u.

  $|\,\text{anton}\,| = 5$
  $|\,123\,| = 3$
  $|\,\varepsilon\,| = 0$

Verkettung zweier Zeichenketten

- Das Ergebnis der Verkettung $u \circ v$ von zwei Zeichenketten u und v ist die Zeichenkette, die entsteht, wenn v an u angehängt wird.

$u = abc$; $v = def$ → $u \circ v = abc \circ def = abcdef$
$u_1 = aa$; $v_1 = bb$ → $u_1 \circ v_1 = aa \circ bb = aabb$
$u_2 = aba$; $v_2 = \varepsilon$ → $u_2 \circ v_2 = aba \circ \varepsilon = aba$
$v_2 \circ u_2 = \varepsilon \circ aba = aba$

Anzahl von Zeichenvorkommen

- Die Anzahl der Vorkommen eines Zeichens s in einem Wort w wird als #(s,w) bezeichnet.

$\#(a,\varepsilon) = \#(a,bcb) = 0$ $\#(a,blahblah) = 2$ $\#(s,u \circ v) = \#(s,u) + \#(s,v)$

Gebräuchliche Abkürzungen

a^3 → aaa
$a^3 \circ b^3$ bzw. a^3b^3 → aaabbb
a^0 → ε

Menge aller Zeichenketten (informell)

- Σ^* ist die Menge aller Zeichenketten (aller Wörter) über dem Alphabet Σ.

  - Es sei Σ = { a, b }; dann ist ...

    Σ^* = { ε, a,b, aa,ab,ba,bb,
    aaa,...,bbb, aaaa,....,bbbb,
    ... }

Übrigens sind die Σ^*-Beispiele oben „längen-lexikographisch“ geordnet, nicht wie im Lexikon (lexikalisch, lexikographisch).

Was ist der Unterschied?
... insbesondere beim Aufzählen unendlicher Sprachen?

Menge aller Zeichenketten (formal; induktive Definition 1)

- Es sei Σ ein Alphabet.
- Wir definieren die Menge Σ^* wie folgt induktiv:

<u>Induktionsanfang:</u> $\varepsilon \in \Sigma^*$
<u>Induktionsschritt:</u> $w \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma \Rightarrow w \circ x \in \Sigma^*$

Die Menge Σ^* bildet zusammen mit der assoziativen* Verkettungsoperation $\circ$ eine Halbgruppe, wobei das leere Wort ε das neutrale Element ist.

*) Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$: $(w_1 \circ w_2) \circ w_3 = w_1 \circ (w_2 \circ w_3)$
z.B. (schoko $\circ$ eis) $\circ$ kugel = schoko $\circ$ (eis $\circ$ kugel) = schokoeiskugel

▶ Menge aller Zeichenketten (formal; induktive Definition 2)

- Es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet
- Wir definieren für alle $n \in N$ die Menge Σ^n wie folgt:

<u>Induktionsanfang:</u> $\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}$
<u>Induktionsschritt:</u> $\Sigma^{n+1} = \{ w \circ x \mid w \in \Sigma^n \text{ und } x \in \Sigma \}$

- ... und verwenden Σ^* als Abkürzung für:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \in N} \Sigma^i \quad (= \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots)$$

▶ Sprachen

- Eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine (formale) Sprache.

Sprachen, Wortproblem

formale Sprachen

- Eine (formale) **Sprache (über Σ)** ist eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$.

das Wortproblem

- Sei L eine formale Sprache über einem Alphabet Σ
- Beim **Wortproblem** für die Sprache L geht es um das folgende Entscheidungsproblem:

zulässige Eingaben:	eine Zeichenkette $w \in \Sigma^*$
zulässige Ausgaben:	Antwort auf die Frage, ob $w \in L$ gilt (ja/nein, W/F, 1/0)

Wir befassen uns intensiv mit
- unterschiedlichen Möglichkeiten, formale Sprachen zu beschreiben,
- und der Frage, ob und – wenn ja – wie effizient man jeweils das Wortproblem lösen kann.

▶ Formale Sprachen sind für Informatiker wichtig.

- Formalen Sprachen begegnen uns sehr häufig :

  Die Menge aller möglichen Eingaben, die ein Programm an einer bestimmten Stelle erwartet, bildet eine formale Sprache.

Beispiele:

- die Menge aller „Quelltexte“ für Programme in einer bestimmten Programmiersprache, die sich mit einem Compiler für diese Programmsprache übersetzen lassen,
- die Menge aller „Quelltexte“ für Dokumente, die von einem bestimmten Internet-Browser dargestellt werden können,
- alle „Quelltexte“ für Dokumente, die ein Textverarbeitungssystem verarbeiten kann.

Alphabete / Zeichenketten / Sprachen

Verkettung zweier Sprachen

- Das Ergebnis der Verkettung $L_1 \circ L_2$ zweier Sprachen L_1 und L_2 ist die Menge aller Zeichenketten, die man erhält, indem man ein Wort v aus L_2 an ein Wort u aus L_1 anhängt:
  $L_1 \circ L_2 := \{ u \circ v \mid u \in L_1, v \in L_2 \}$

  $\Rightarrow \ | L_1 \circ L_2 | \leq | L_1 | \cdot | L_2 |$

Beispiel

$\{\varepsilon,a,ab\} \circ \{b,ab\} = \{b,ab,aab,abb,abab\}$

Gebräuchliche Abkürzungen

- L_1L_2 für $L_1 \circ L_2$
- L^n für $L \circ L \circ \ldots \circ L$ (n-mal)
- L^0 für $\{\varepsilon\}$
- L^* für $\bigcup_{i \in N} L^i \quad (= L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots)$

Beschreibungen von Sprachen

Es gibt u.a. die folgenden Ansätze, eine Sprache L zu beschreiben

- Man gibt direkt ein Programm an, das das **Wortproblem** für die Sprache L löst. (Das geht nicht für alle Sprachen.) L ist die Menge aller Wörter, bei denen das Programm „ja“ ausgibt.
- Man gibt Regeln an, die es erlauben, genau die zu L gehörenden Wörter zu **erzeugen**. Das geht evtl. auch dann, wenn es kein Programm gibt, das das Wortproblem für L löst.

Das Erzeugungsproblem lässt sich auf das Wortproblem – wenn lösbar – **reduzieren**:
Man erzeugt systematisch alle Wörter w aus Σ^*, entscheidet jeweils, ob $w \in L$, und gibt nur die w mit der Antwort „ja“ aus.

Beispiel (erster Ansatz)

- Es seien $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und
- $L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w hat genauso viele Nullen wie Einsen $\}$.

Algorithmus für Wortproblem:

- Verarbeite das gegebene Wort w zeichenweise von links nach rechts.
- Initialisiere zwei Zähler C_0 und C_1 jeweils mit 0.
- Wenn das aktuell gelesene Zeichen …
  - eine Null ist, so setze $C_0 = C_0+1$;
  - eine Eins ist, so setze $C_1 = C_1+1$.
- Falls C_0 und C_1 nach vollständiger Verarbeitung von w denselben Wert haben, gib „ja“ aus; sonst gib „nein“ aus.

▶ Beispiel (zweiter Ansatz)

- Es seien $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und
- $L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w hat genauso viele Nullen wie Einsen $\}$.

Erzeugungsregeln (hier: simultane Induktion mit Hilfssprachen L_i)**:**

- ε ist ein Wort in L_0.
- Ist n eine ganze Zahl und w ein Wort in L_n, so ist $w \circ 0$ ein Wort in L_{n-1} und $w \circ 1$ ein Wort in L_{n+1}.

  So haben z.B. Wörter in L_3 drei mehr Einsen als Nullen, und die in L_{-3} haben 3 mehr Nullen als Einsen.
- L ist gerade L_0.

Geht es auch „einfach induktiv“, ohne Hilfssprachen? → Übung!

Präfix / Suffix (informell)

- Jedes Anfangsstück einer Zeichenkette u heißt Präfix von u.

  u = anton → ε, a, an, ant, anto, anton
  u_1 = 123 → ε, 1, 12, 123

- Jedes Endstück einer Zeichenkette u heißt Suffix von u.

  u = anton → ε, n, on, ton, nton, anton
  u_1 = 123 → ε, 3, 23, 123

▶ Präfix / Suffix (formal)

- es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet
- es sei $u \in \Sigma^*$

Ein Wort $p \in \Sigma^*$ ist ein Präfix von u gdw. es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $p \circ w = u$.

Ein Wort $s \in \Sigma^*$ ist ein Suffix von u gdw. es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $w \circ s = u$.

Gliederung der Vorlesung

0. Einleitung und Grundbegriffe
1. Endliche Automaten
2. Formale Sprachen
3. Berechenbarkeitstheorie
4. Komplexitätstheorie

0.1. Hinführung zu Berechenbarkeit und Komplexität
0.2. Problemtransformation
0.3. Mathematische Grundlagen und Vorarbeiten
- Sprachen
- **Mengen und Relationen**
- Graphen und Wege

Mengen

- Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Elementen.

  $M_1 = \{$ Kreuz, Pik, Herz, Karo $\}$
  $M_2 = \{ n \mid n \in N$ und $n \bmod 2 = 0 \}$
  $M_3 = \{ v \circ 111 \mid v \in \Sigma^* \}$, wobei $\Sigma = \{ 0,1 \}$ gelte
  besondere Menge: $\emptyset$

Teilmenge / Obermenge

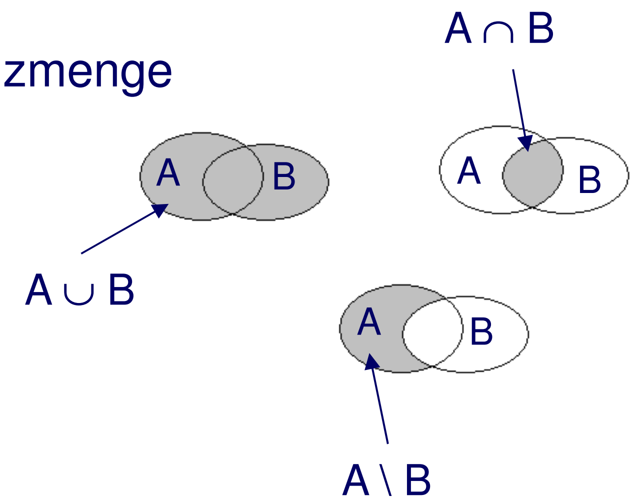
- $A \subseteq B \leftrightarrow$ jedes Element von A ist auch ein Element von B
- $A \supseteq B \leftrightarrow$ jedes Element von B ist auch ein Element von A

Kapitel 0: Grundbegriffe

Mengen / Relationen

Durchschnitt / Vereinigung / Differenz / Potenzmenge

- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$
- $2^A = \{ M \mid M \subseteq A \}$



Einfache Zusammenhänge

- $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$
- $(A \setminus B) \subseteq A$
- $\emptyset \in 2^A$, $A \in 2^A$

Mächtigkeit einer Menge

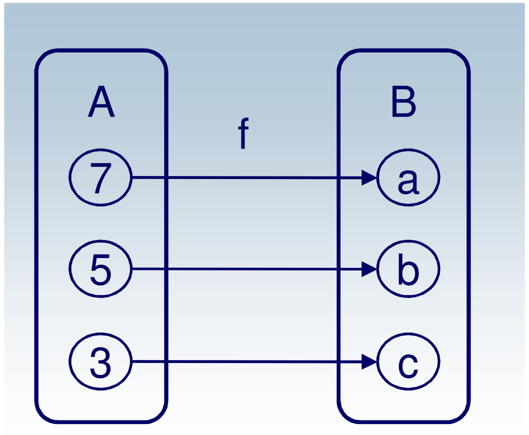
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente der Menge A.

  Bei unendlichen Mengen erfordert der Begriff
  eine eigene kleine Theorie ... → *Kardinalzahlen*

- 2^A hat $2^{|A|}$ Elemente: $|2^A| = 2^{|A|}$.

Mächtigkeitsvergleiche

- $|A| = |B|$ gilt gdw.:
  Es existiert eine bijektive
  Abbildung $f : A \to B$



- A heißt abzählbar, wenn $|A| = |N|$.

$A = \{a_0, a_1, a_2, ... \}$ (oder $\{a_1, a_2, a_3, ... \}$)

Beispiele für abzählbare Mengen

- die Menge N der natürlichen Zahlen
- die Menge Q der rationalen Zahlen
- die Menge aller Zeichenketten über einem endlichen Alphabet
- jede unendliche formale Sprache über einem endlichen Alphabet

Beispiele für nicht abzählbare unendliche (überabzählbare) Mengen

- die Menge der reellen Zahlen (bereits zwischen 0 und 1)
- die Potenzmenge jeder abzählbaren Menge
- die Menge aller formalen Sprachen über einem endlichen Alphabet

▶ Cantorsches Diagonalverfahren an einem Beispiel ...

> Die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist nicht abzählbar.

<u>Georg Cantors Beweis (1877)</u>

- Annahme: Sie ist abzählbar.
- Dann kann man ihre Elemente abzählen: r_1, r_2, r_3, ... , und zwar jedes als unendlichen (!) Dezimalbruch

  z.B. 0,6 = 0,5999...

  $r_1 =\ 0,\ r_{11}\ r_{12}\ r_{13}\ \ldots$

  $r_2 =\ 0,\ r_{21}\ r_{22}\ r_{23}\ \ldots$

  $r_3 =\ 0,\ r_{31}\ r_{32}\ r_{33}\ \ldots$

  usw.
- Sei nun die reele Zahl s := 0, $s_1\ s_2\ s_3$ ... Gegeben durch:

  s_k := 5 wenn $r_{kk} \neq 5$, ansonsten 4.

  $s_k \neq r_{kk}$, also $s \neq r_k$
- Ist s eine der Zahlen r_1, r_2, r_3, ... ?

  Ja und Nein !!
- Also ist die Annahme falsch. (Widerspruchsbeweis)

Binäre Relationen

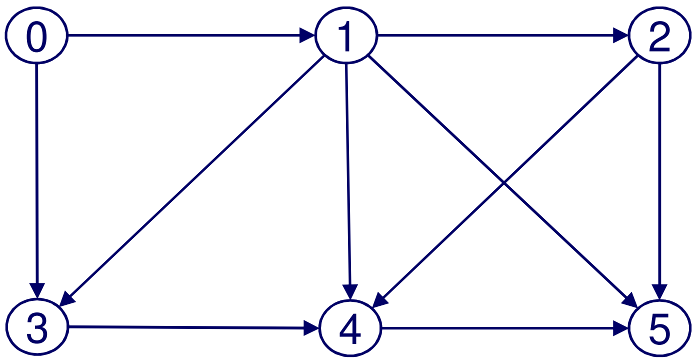
- Eine binäre Relation R zwischen A und B ist eine Menge von geordneten Paaren, d.h. $R \subseteq \{ (a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$.

  - aRb ist eine andere Schreibweise für $(a,b) \in R$.
  - Falls $A = B$ gilt, so nennt man R Relation auf A.

Eine Relation auf A entspricht einem gerichteten Graphen mit Knotenmenge A.

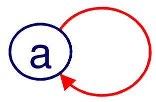
Beispiel

$A = \{ 0,1,2,3,4,5 \}$
$R = \{ (0,1),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$
$(2,4),(2,5),(3,4),(4,5) \}$

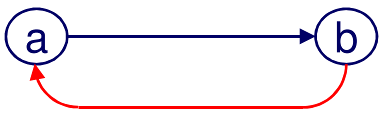


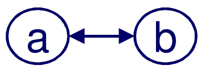
▶ Reflexivität / Symmetrie / Transitivität

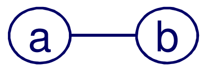
- Eine Relation R auf A ist reflexiv gdw. für alle a ∈ A gilt:
  (a,a) ∈ R.



- Eine Relation R auf A ist symmetrisch gdw. für alle a,b ∈ A gilt:
  Wenn (a,b) ∈ R, so (b,a) ∈ R.

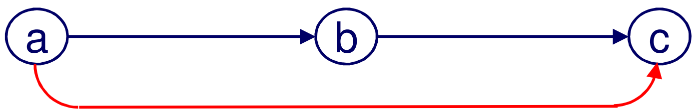


(alternativ auch 

bzw. 

)

- Eine Relation R auf A ist transitiv gdw. für alle a,b,c ∈ A gilt:
  Wenn (a,b) ∈ R und (b,c) ∈ R, so auch (a,c) ∈ R.



Transitive Hülle

- Die transitive Hülle Trans(R) einer Relation R auf A ist die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften:
  - wenn $(a,b) \in R$, so $(a,b) \in \text{Trans}(R)$
  - wenn $(a,b) \in \text{Trans}(R)$ und $(b,c) \in \text{Trans}(R)$, so $(a,c) \in \text{Trans}(R)$

... statt Trans(R) ist auch die Bezeichnung R^+ üblich

Reflexive Hülle

- Die reflexive Hülle (auf A) Refl(R) einer Relation R auf A ist die wie folgt definierte Relation: $\text{Refl}(R) = R \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$ –

  offensichtlich die kleineste reflexive Relation auf A, die R umfasst.

▶ Wer erkennt die Haken dabei? – Nummer 1

- Wieso **gibt es eigentlich eine kleinste** transitive Relation, die R enthält?
  - Es könnte ja mal gar keine geben*
    oder mehrere, aber keine kleinste**

- Wir haben hier gewissermaßen einen **Glücksfall**:
  - $A \times A$ ist transitiv und $\supseteq$ R.
  - Der Durchschnitt beliebiger Familien transitiver Relationen ist transitiv.
  - Der Durchschnitt beliebiger Familien von R umfassenden Relationen umfasst R.
  - Also ist Durchschnitt aller transitiven Relationen Q mit $R \subseteq Q$
    transitiv und enthält R
    und ist somit auch die kleinste solche Relation.

*) zum Beispiel, wenn $R = \emptyset$ & Eigenschaft = nicht leer sein.
**) zum Beispiel, wenn $A = \{a,b\}$ & $R = \{(a,a)\}$ & Eigenschaft = zwei Paare enthalten

Wer erkennt eine weitere Feinheit? – Nummer 2

- Wieso muss man bei der reflexiven Hülle eigentlich „**auf A**“ dazu sagen?
- Na klar:
  weil das, was evtl. an Paaren hinzukommt,
  von der gewählten Grundmenge A abhängt.
- Und wieso fehlt „**auf A**“ bei der transitiven Hülle?
- Na klar: …
- Gibt es eigentlich auch eine symmetrische Hülle?
- Na klar: …

▶ Ein einfacher Zusammenhang

- es sei R eine Relation R über A

Dann gilt: Refl(Trans(R)) = Trans(Refl(R)).

... es ist egal, ob man erst die transitive und dann die reflexive Hülle oder erst die reflexive und dann die transitive Hülle bildet

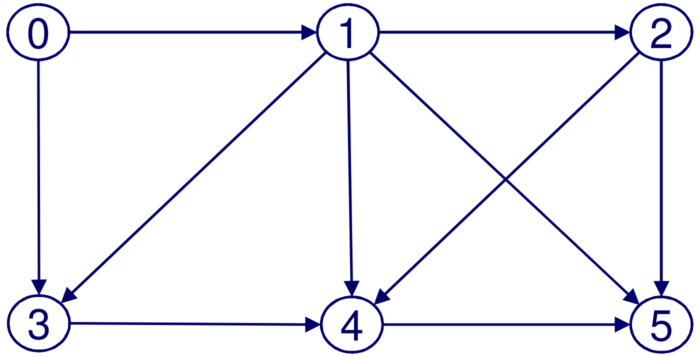
▶ Reflexive und transitive Hülle

- Die reflexive und transitive Hülle R* einer Relation R über A ist die wie folgt definierte Relation: R* = Refl(Trans(R)).

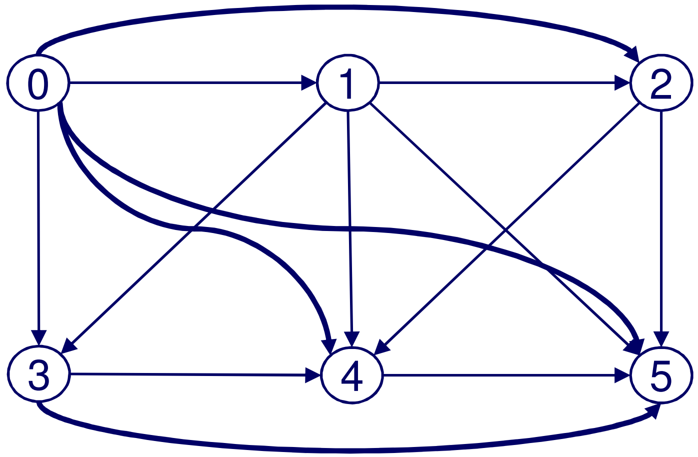
... per Definition gilt: $R^* = R^+ \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$

- Beispiel

$A = \{ 0,1,2,3,4,5 \}$
$R = \{ (0,1),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$
$(2,4),(2,5),(3,4),(4,5) \}$



$R^+ = \{ (0,1),(0,3),\mathbf{(0,2)},\mathbf{(0,4)},\mathbf{(0,5)},$
$(1,2), (1,3),(1,4),(1,5),(2,4),$
$(2,5),(3,4),\mathbf{(3,5)},(4,5) \}$



▶ Begriff: Äquivalenzrelation

- Sei M eine Menge und R eine zweistellige Relation über M.
- R ist eine Äquivalenzrelation über M, falls gilt:
  - R ist reflexiv, d.h. für alle $x \in M$ gilt: xRx,
  - R ist symmetrisch, d.h. für alle $x,y \in M$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$, und
  - R ist transitiv, d.h. für alle $x,y,z \in M$ gilt: xRy und $yRz \Rightarrow xRz$.

▶ Begriff: Klasseneinteilung / Partition

- Sei M eine Menge und $K = \{ M_i \mid i \in I \}$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von M.
- K ist eine Klasseneinteilung (bzw. Partition) der Menge M, falls gilt:
  - Je zwei verschiedene Mengen in K sind disjunkt: $i \neq k \Rightarrow M_i \cap M_k = \emptyset$
  - M wird von den M_i überdeckt: $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

  … bzw.: Jedes $x \in M$ liegt in genau einem M_i.

Zusammenspiel der beiden Begriffe

- Sei M eine Menge und R eine Äquivalenzrelation über M,
- und für jedes $x \in M$ sei $[x]_R = \{ y \in R \mid xRy \}$, die Äquivalenzklasse von x.
- Dann gilt:

> Die Menge $K = \{ [x]_R \mid x \in M \}$ ist eine , (die durch R induzierte) Klasseneinteilung auf der Menge M

- Sei M eine Menge und $K = \{ M_i \mid i \in I \}$ eine Klasseneinteilung auf der Menge M,
- und für alle $x,y \in M$ sei xRy die Relation „x und y liegen in derselben Menge M_i."
- Dann gilt:

> Die Relation R ist eine (die durch K induzierte) Äquivalenzrelation auf der Menge M.

Genau dann induziert R K, wenn K R induziert.

▶ Beispiel

- Sei M die Menge aller Schüler einer Schule mit festen Klassen.
- Sei R wie folgt definiert:
  - Für zwei Schüler s und s‘ gilt genau dann sRs‘, wenn s und s‘ in dieselbe Schulklasse gehen.
- Dann gilt:
  - R ist eine Äquivalenzrelation über M.
  - Die Äquivalenzklasse $[s]_R$ eines Schülers s ist die Schulklasse, in die dieser Schüler geht.
  - Die Äquivalenzklassen der durch R auf M induzierten Klasseneinteilung K sind genau die Schulklassen dieser Schule.

- Im Schulbeispiel … : R = gehen in dieselbe Schulklasse

  - Die Äquivalenzklassen der durch R auf M induzierten Klasseneinteilung K sind genau die Schulklassen dieser Schule.

Vergleich von Äquivalenzrelationen

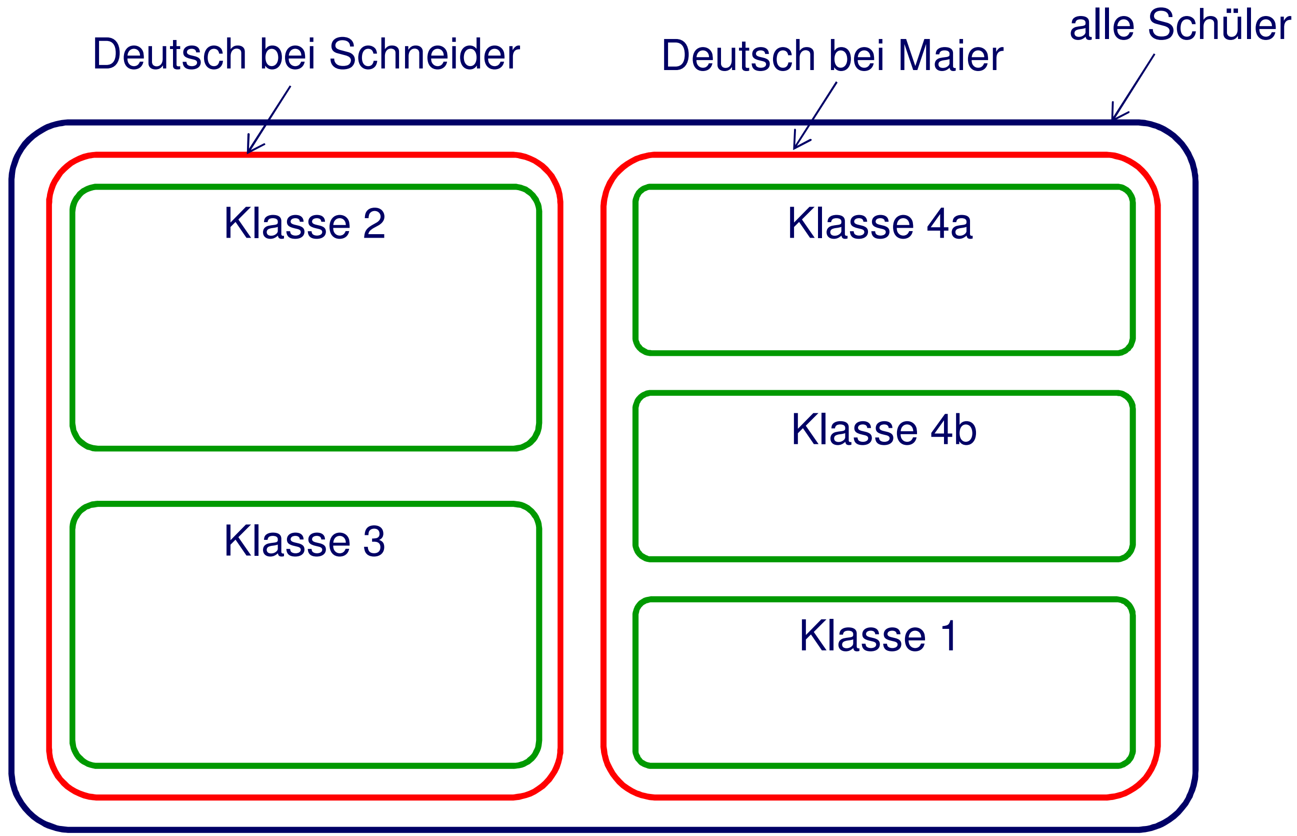
- Seien M eine Menge und R und Q Äquivalenzrelationen auf M.
- Dann nennt man R feiner als Q, falls gilt:
  - wenn (als Teilmengen von $M \times M$) $R \subseteq Q$,
  - bzw. - gleichbedeutend – für alle $x,y \in M$ gilt $xRy \Rightarrow xQy$.

*… bei R sind **weniger** Paare äquivalent …*

Dem entspricht in den induzierten Klasseneinteilungen K_R und K_Q, dass K_R feiner als K_Q ist, d.h. dass

- jede R-Äquivalenzklasse $[x]_R$ eines Elements x ganz in dessen Q-Äquivalenzklasse $[x]_Q$ enthalten ist,
- bzw. - gleichbedeutend – dass für alle $M_R \in K_R$ ein $M_Q \in K_Q$ mit $M_R \subseteq M_Q$ existiert.

- Im Schulbeispiel … : R feiner als Q
  - R = gehen in dieselbe Schulklasse
  - Q = haben denselben Deutschlehrer



Äquivalenzrelationen und Abbildungen

- Sei R eine Relation auf einer Menge M.
  Dann gilt genau dann

  - R ist eine Äquivalenzrelation

  wenn gilt

  z.B. Klasse von x,
  Deutschlehrer von x

  - Es existiert eine Menge M' und eine Abbildung $f: M \to M'$ so, dass für alle $x,y \in M$ gilt: $x \, R \, y$ gdw. $f(x) = f(y)$.

Äquivalenz bedeutet Wertegleichheit unter einer Abbildung.

Beweisidee $\Rightarrow$: f ordne jedem Element seine Äquivalenzklasse zu.

Beweisidee $\Leftarrow$: Verwenden: = ist Äquivalenzrelation

Mehrstellige Relationen

- Eine n-stellige Relation R zwischen Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist eine Menge von n-Tupeln (≈ records, ohne Namen für die Positionen) mit den entsprechenden Komponenten, d.h. $R \subseteq \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \text{für } i=1, \ldots, n: x_i \in M_i \}$.

Beispiele

- M_1 = Personen, M_2 = Warengruppen, M_3 = Ladentypen
- R = Einkaufsgewohnheiten
- Frau Müller kauft Kleidung bei Kik.
- Frau Maier kauft Kleidung bei Desigual.
- Herr Blaumann kauft Schnaps an der Tankstelle.

R = { (Mü,Kl,Ki), (Ma,Kl,De), (Bl,Sc,Ta) }

- $M_1 = M_3$ = Personen, M_2 = soziale Beziehungsweisen
- Q = soziale Beziehungen
- Frau Müller beneidet Frau Maier.
- Frau Maier geht Herrn Blaumann aus dem Weg.
- Herr Bl. und Frau Müller sind im gleichen Kegelverein (und nicht identisch).

Q = { (Mü,Be,Ma), (Ma,Gw,Bl), (Bl,Kv,Mü), (Mü,Kv,Bl) }

Relationen: Beschreibungsvarianten

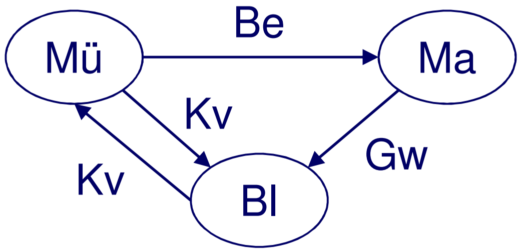
- Beschreibung der beteiligten Mengen, im letzten Beispiel …

  $M_1 = M_3 = \text{Personen} = \{\text{Mü}, \text{Ma}, \text{Bl}\}$, $M_2 = \text{soziale Beziehungsweisen} = \ldots$

- Beschreibung der Tupelmenge

  Da gibt es zahlreiche Alternativen!

  - **Liste**/Aufzählung der Tupel
    im Beispiel: Q = { (Mü,Be,Ma), (Ma,Gw,Bl), (Bl,Kv,Mü), (Mü,Kv,Bl), }
  - **Graphen** (beschriftet, manchmal möglich)
    im Beispiel:



  - **Funktionen/Abbildungen**
  - z.B. so: $Q_1(\text{Mü}) = \{(\text{Be},\text{Ma}), (\text{Kv},\text{Bl})\}$, $Q_1(\text{Ma}) =$ … usw.
  - oder so: $Q_2(\text{Mü},\text{Be}) = \{\text{Ma}\}$, $Q_2(\text{Mü},\text{Kv}) = \{\text{Bl}\}$, … usw.
  - oder geschachtelt: $Q_3(\text{Mü},P_1)$, $P_1(\text{Be}) = \{\text{Ma}\}$, … usw.

Beschreibungsvarianten von Relationen, Konsequenzen

- Die Umgruppierungen im Punkt „Funktionen/Abbildungen“ erzeugen mit *Funktionen* natürlich auch spezielle (linkstotal, rechtseindeutige) *Relationen*, die letztlich definiert oder aufgezählt werden müssen.

- Eigentlich ein und dieselbe Relation *kann* nicht nur auf solche unterschiedlichste Weisen definiert bzw. beschrieben werden – das *passiert* auch tatsächlich!

- … und führt dann oft dazu, dass die im Prinzip gleichen Begriffe in unterschiedlichen Büchern oder Webseiten scheinbar ganz unterschiedlich definiert werden. ☹

- Da Haskell Curry (1900-1982) als (fast) erster diese Darstellungsweisen systematisch verwendet und untersucht hat, nennt man den Übergang zwischen solchen Varianten auch Currying.

Gliederung der Vorlesung

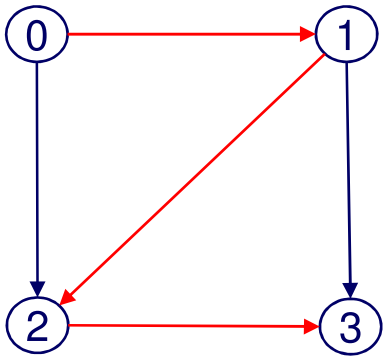
Wege … von a nach b, und ihre Länge (induktive Definition)

- Es sei (R,A) ein gerichteter Graph über einer Menge A.
- Wir definieren Wege in (R,A) [von $a \in A$ nach $b \in A$ & ihre Länge] wie folgt:

<u>Induktionsanfang:</u> ε ist ein Weg der Länge 0 von a nach a.

<u>Induktionsschritt:</u> Ist w ein Weg von a nach b der Länge n und $(b,c) \in R$, dann ist w(b,c) ein Weg von a nach c der Länge n+1.

- $W_{a,b}$ sei die Menge aller Wege von a nach b.



Anfangsknoten Endknoten

w = (0,1) (1,2) (2,3) $\in W_{0,3}$, Weg: Wort über R.

Gleichwertige Sichtweise eines Wegs als Knotenfolge:

w = 0 1 2 3 Weg: Wort über A.

... passende induktive Definition(en)?

Geschlossene Wege (Schleifen)

- Es sei (R,A) ein gerichteter Graph über einer Menge A.
- Ein Weg $u = (u_0,u_1) \ldots (u_{m-1}, u_m)$
  heißt geschlossen oder Schleife genau dann, wenn $u_0=u_m$.

  Spezialfall: der leere Weg ε der Länge 0 von a nach a.

Wie sehen bei Knotenfolgen-Sichtweise Schleifen aus?
... und leere Schleifen?

Etwas mehr über Wege …

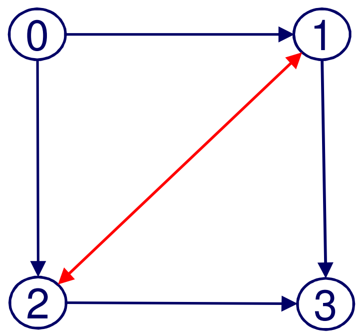
- Lange Wege in „kleinen“ Graphen (d.h. mit wenigen Knoten)

Schleifen-Lemma für Wege:

- Es sei (R,A) ein gerichteter Graph über einer Menge A mit n Knoten.
- Es sei w ein Weg $(w_0,w_1) \ldots (w_{m-1}, w_m)$
  (also aus m Kanten bzw. über m+1 Knoten) mit $m \geq n$.

- Dann enthält w eine nicht leere Schleife $(w_i,w_{i+1}) \ldots (w_{k-1}, w_k)$
  (also mit $w_i = w_k$) mit $0 \leq i < k \leq n$.

Beispiel



w = 0 1 2 1 3
w = (0,1)(1,2)(2,1)(1,3)

Begründung:

Da w über mindestens n+1 Knoten führt, und es nur n<n+1 verschiedene gibt, muss er bei mindestens einem Knoten zweimal vorbeiführen.

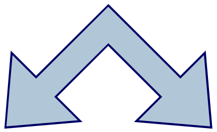
pigeonhole principle – Taubenschlagprinzip

Etwas mehr über Wege …

„Pumping“ bei Schleifen

Eine nicht leere Schleife in einem Weg von a nach b
Garantiert die Existenz *eines kürzeren*
und *unendlich vieler längerer*
Wege von a nach b:

w = 0 1 2 1 3
w = (0,1)(1,2)(2,1)(1,3)



0 1 3
(0,1) (1,3)

0 1 2 1 2 1 3
(0,1)(1,2)(2,1)(1,2)(2,1)(1,3)

0 1 2 1 2 1 2 1 3
(0,1)(1,2)(2,1)(1,2)(2,1) (1,2)(2,1)(1,3)

usw.

Verkettung von Wegen

Es seien

- (R,A) ein gerichteter Graph über einer Menge A,
- $a,b,c \in A$,
- $u = (u_0,u_1) \dots (u_{m-1}, u_m) \in W_{a,b}$ $(u_0=a, u_m=b)$ und
  $v = (v_0,v_1) \dots (v_{n-1}, v_n) \in W_{b,c}$ $(v_0=b, v_n=c)$.

Die Verkettung $u \circ v := (u_0,u_1) \dots (u_{m-1}, u_m) (v_0,v_1) \dots (v_{n-1}, v_n)$
ist ein Weg von $u_0=a$ nach $v_n=c$.

Achtung bei Knotenfolgen-Sichtweise:
Endknoten u_m = *Anfangsknoten* v_0 –
erscheint in $u \bullet v := u_0 \dots u_m v_1 \dots v_n$ *an der „Klebestelle" nur einmal!*

Etwas mehr über Wege …

▶ Verkettung von Schleifen

- Die Verkettung $u \circ v$ zweier Schleifen $u,v \in W_{a,a}$ ist wiederum eine Schleife $\in W_{a,a}$.

- Für jede Teilmenge $Q \subseteq W_{a,a}$ ist Q^*, die Menge aller endlichen Verkettungen von Schleifen aus Q, induktiv definiert durch

Induktionsanfang:	$\varnothing \in Q^*$
Induktionsschritt:	Ist $u \in Q^*$ und $v \in Q$ dann ist $u \circ v \in Q^*$.

induktiv beweisbar: $Q^* \subseteq W_{a,a}$

Etwas mehr über Wege …

- Wege über ausgewählte Zwischenknoten

Es seien
- (R,A) ein gerichteter Graph über einer Menge A und
- A = {0, 1, 2, …, n}

Zwischenknoten-Lemma für Wege:

Sei $W_{i,j,k}$ die Menge der Wege von i nach j,
bei denen nach dem Anfangsknoten i
und vor dem Endknoten j
nur Knoten l mit $l \leq k$ vorkommen.

Dann ist

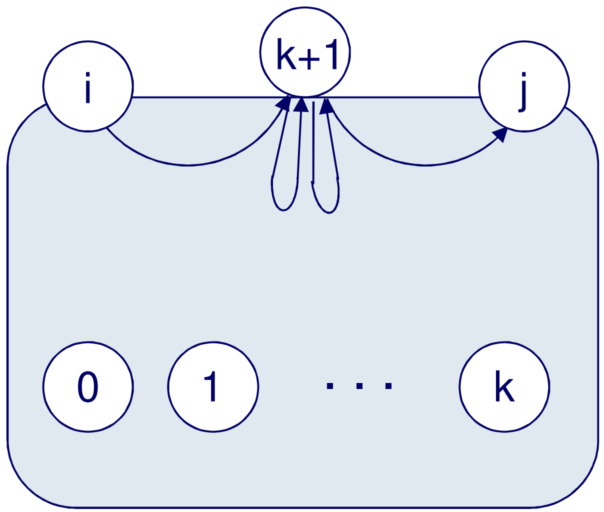
$$W_{i,j,k+1} = W_{i,j,k} \cup W_{i,k+1,k} (W_{k+1,k+1,k})^* W_{k+1,j,k}$$

Etwas mehr über Wege …

- Klingt kompliziert?

Zwischenknoten-Lemma

$$W_{i,j,k+1} = W_{i,j,k} \cup W_{i,k+1,k}\,(W_{k+1,k+1,k})^*\,W_{k+1,j,k}$$



... egal ob i bzw. j $\leq$ k oder nicht.

Begründung:

Sei $w \in W_{i,j,k+1}$.

Entweder ist (k+1) gar nicht unter den Zwischenknoten, also $u \in W_{i,j,k}$.

Oder es geht von i
zum ersten Mal nach (k+1),

dann evtl. noch mehrmals
von (k+1) zu sich selbst

und nach dem letzten Mal von (k+1) nach j

(jeweils über Zwischenknoten $\leq$ k).

Wozu die Mühe? → reguläre Ausdrücke!