Gliederung

Grenzen endlicher Automaten

▶ Gibt es Sprachen, die nicht Automatensprachen sind?

- Endliche Automaten bilden ein sehr einfaches Beschreibungsmittel und Berechnungsmodell.
  Falls es Sprachen gibt, die keine Automatensprachen sind, benötigt man komplexere (oder zumindest andere) Beschreibungsmittel bzw. Berechnungsmodelle.

- Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass es tatsächlich Sprachen gibt, die keine Automatensprachen sind.

- Dabei werden wir allgemeine Eigenschaften von Automatensprachen identifizieren.

- Gleichzeitig werden wir einen neuen Weg zum Minimalautomaten kennenlernen.

Grenzen endlicher Automaten

Ausblick

- Wir betrachten zwei brauchbare Ansätze, um ggf. nachzuweisen, dass es zu einer gegebenen Sprache L keinen endlichen Automaten A mit L(A) = L gibt:

  - Man analysiert die Eigenschaften einer in Abhängigkeit von L definierten Klasseneinteilung bzw. Äquivalenzrelation auf Σ^*.

  - Man wendet das sogenannte Pumping-Lemma an.

  … und werden ihre Vor- und Nachteile diskutieren.

Die Fortsetzungsmengen-Abbildung einer Sprache über Σ

Vgl. Algebra:
$(ab)^{-1}(abcb)=cb$

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und jedes Wort $u \in \Sigma^*$ sei $u^{-1}(L) := \{v \in \Sigma^* \mid u \circ v \in L\}$.

... das, was in L „nach u noch kommen kann“, die Restsprache von u

Weg von L nach $u^{-1}(L)$:

*Alle Wörter **wegwerfen**, die **nicht** mit u beginnen. Vom Rest die Anfangs-**u löschen**.*

Beispiele:

- $a^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
- $a^{-1}(\{\varepsilon\}) = \varnothing$
- $a^{-1}(\{ba\}) = \varnothing$
- $a^{-1}(\{a,abc,bad\}) = \{\varepsilon,bc\}$

▶ Der Restsprachenautomat A(L) einer Sprache L

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache über dem Alphabet Σ.

Der (nicht notwendig endliche) Restsprachenautomat von L ist
$A(L) = [Z,\Sigma,z_0,F,\delta]$ mit

- $Z = \{ u^{-1}(L) \mid u \in \Sigma^* \}$,
- $z_0 = L$,
- $F = \{ z \in Z \mid \varepsilon \in z \}$,
- Für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$:
  $\delta(z,a) = a^{-1}(z) = \{ a^{-1}(w) \mid w \in z \}$.

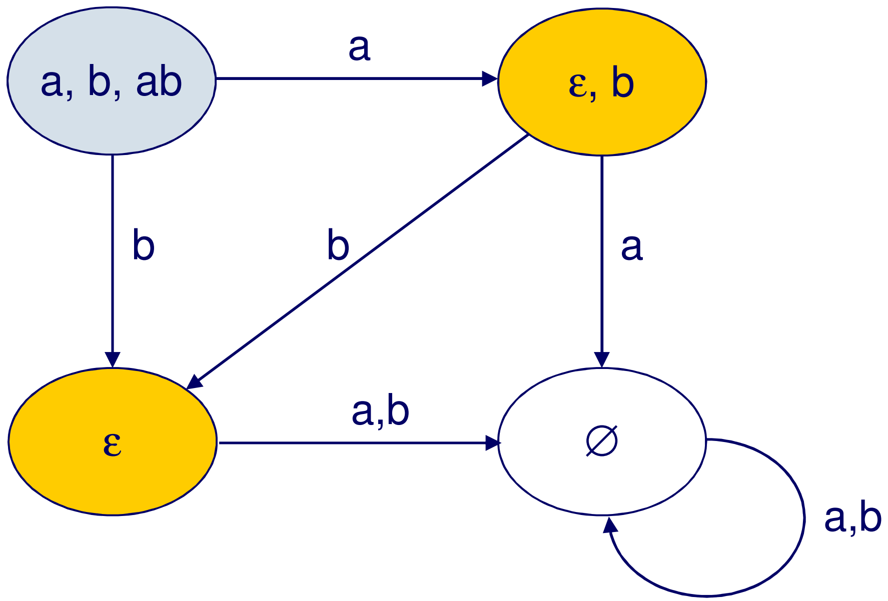
Neuer Begriff: ein unendlicher Automat

Gewöhnungsbedürftig: Jeder Zustand ist hier eine komplette Sprache!

A(L) ist nicht unbedingt gut handhabbar, denn:
Wie gehen wir dabei z.B. mit unendlich vielen unendlichen Sprachen um?

▶ Der Restsprachenautomat A(L) einer Sprache L (Beispiel 1)

- Beispiel 1



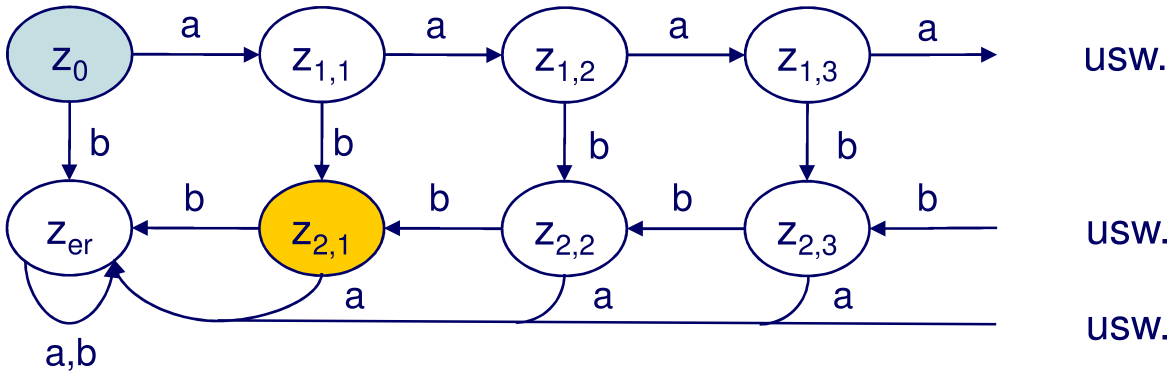
$\Sigma=\{a,b\}$

- Beispiel 2 $L = \{ a^n b^n \mid n \in N \} \rightarrow A(L) = ?$

Grenzen endlicher Automaten

▶ Der Restsprachenautomat A(L) einer Sprache L (Beispiel 2)

- Sei $L = \{ a^n \circ b^n \mid n > 0 \}$.
- Dann sieht A(L) wie folgt aus:



$z_0 = L$ $\qquad$ $z_{1,k} = \{ a^n \circ b^{n+k} \mid n \geq 0 \}$

$z_{er} = \emptyset$ $\qquad$ $z_{2,k} = \{ b^{k-1} \}$

Grenzen endlicher Automaten

- Der Restsprachenautomat A(L) einer Sprache L
… hat tolle Eigenschaften (Myhill/Nerode):

Fakt:

Genau dann ist der Restsprachenautomat A(L) endlich, wenn L die Sprache L(A) eines endlichen Automaten A ist.

Das werden wir noch begründen!

Fakt:

Für jeden endlichen Automaten A ist A(L(A)) ein Minimalautomat zu A, d.h. der Restsprachenautomat ist minimal.

Das werden wir noch begründen!

Da A(L) für jede Sprache existiert und von fundamentaler Bedeutung ist, Nennt man ihn auch den kanonischen Automaten von L.

Begriff: Nerode-Relation

Erinnerung an Fortsetzungsmengen (Restsprachen):

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $u \in \Sigma^*$;

  dann war: $\boxed{u^{-1}(L) = \{ v \in \Sigma^* \mid u \circ v \in L \}.}$

$u^{-1}(L)$ enthält alle Wörter v, die, an u angehängt, ein Wort aus L ergeben.
Die $u^{-1}(L)$, $u \in \Sigma^*$, bilden die Zustände des kanonischen Automaten von L.

- Die Nerode-Relation R_L auf Σ^* gilt zwischen u_1 und u_2, wenn beide auf genau die gleiche(n) Weise(n) zu einem Wort in L verlängert werden können, d.h. wenn beide die gleiche Restsprache in L haben:

$$\boxed{\text{Es gilt genau dann } u_1 R_L u_2, \text{ wenn } u_1^{-1}(L) = u_2^{-1}(L) \text{ gilt.}}$$

Wie wir wissen, ist diese Relation eine Äquivalenzrelation über Σ^*, da sie Wertegleichheit bei Abbildung $f(u)=u^{-1}(L)$ entspricht.

▶ Nerode-Relation und Restsprachen

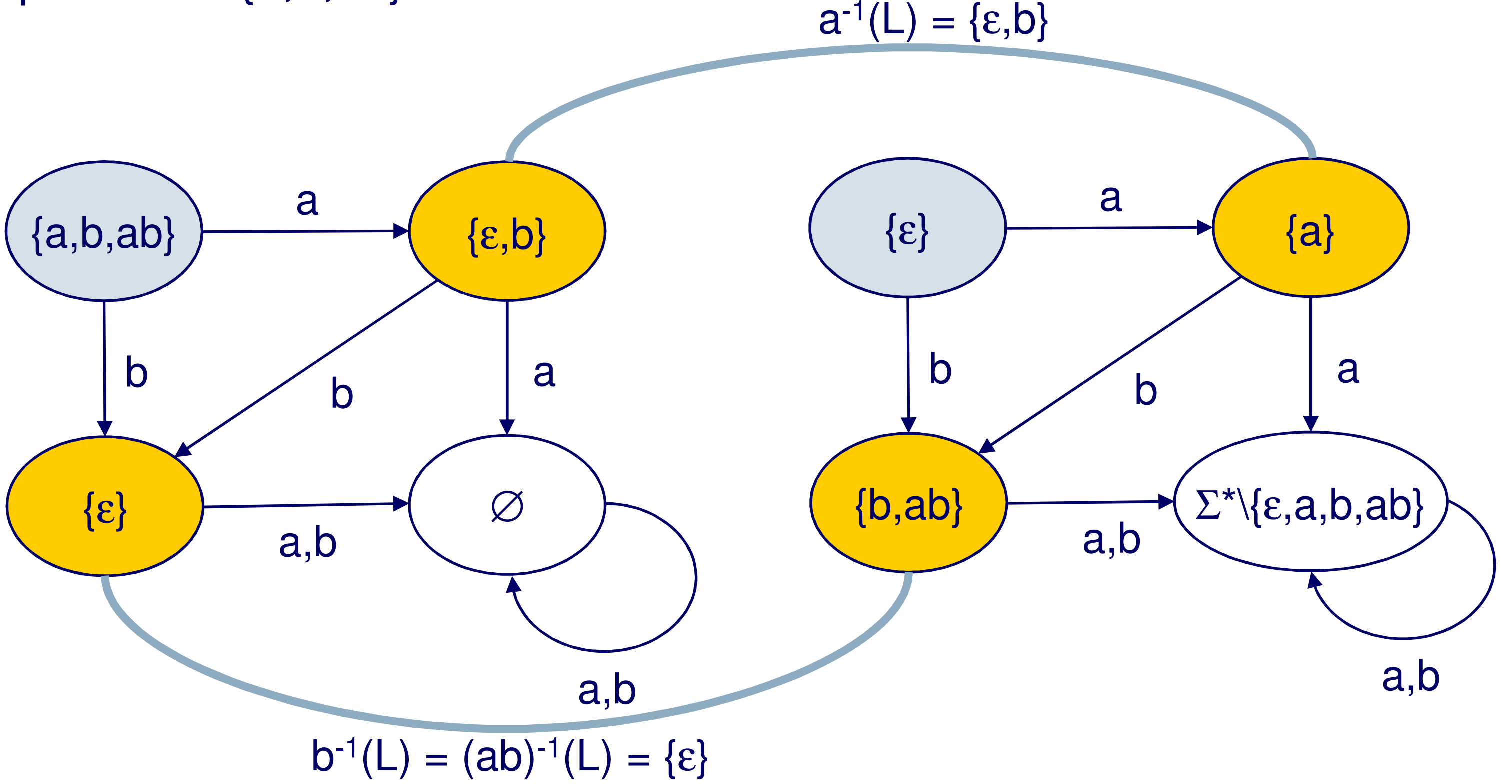
Jede Sprache L über Σ hat genauso viele Restsprachen (Zustände im Restsprachenautomat) wie Äquivalenzklassen in der Nerode-Relation R_L

- Die Abbildung $g: u^{-1}(L) \to [u]_{RL}$
  von der Menge aller Restsprachen von L
  in die Menge aller R_L-Äquivalenzklassen
  ist bijektiv:

- Sie ist …
  surjektiv, denn $[u]_{RL} = g(u^{-1}(L))$,
  injektiv, denn $[u]_{RL} = [u]_{RL}$ gdw. $u \, R_L \, v$ gdw. $u^{-1}(L) = v^{-1}(L)$.

Was erhalten wir, wenn wir im Restsprachenautomat A(L) nicht die Restsprachen als Zustände nehmen, sondern deren g-Bilder? →
Nerode-Äquivalenzklassen-Automat

- Restsprachenautomat A und Nerode-Äquivalenzklassen-Automat B
  Beispiel 1: $L = \{a,b,ab\}$



Hier gilt für alle Zustände z:
für alle $w \in K_A(z)$: $z = w^{-1}(L(A))$!

Hier gilt für alle Zustände z:
$z = K_B(z)$!

Restsprachenautomat und Nerode-Äquivalenzklassen-Automat – Beispiel 2

- Sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und $L = \{ 00 \circ w \mid w \in \Sigma^* \}$.

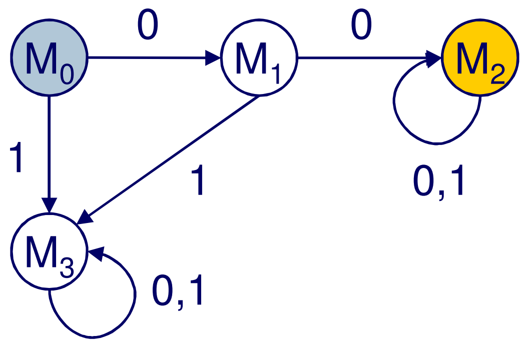
Restsprachen

$M_0 = 00 \circ \Sigma^*$

$M_1 = 0 \circ \Sigma^*$

$M_2 = \Sigma^*$

$M_3 = \emptyset$



Nerode-Klassen

$M_0 = \{\varepsilon\}$

$M_1 = \{0\}$

$M_2 = 00 \circ \Sigma^*$

$M_3 = \Sigma^* \setminus (\{\varepsilon,0\} \cup 00 \circ \Sigma^*$
$\quad = \{1,01\} \circ \Sigma^*$

Nerode-Äquivalenzklassen – Beispiel 3

- Sei $\Sigma^* = \{a,b\}$ und $L = \{a^n \circ b^n \mid n \in N_0\}$.
- Dann gilt für alle Wörter $u_i = a^i \circ b$ mit $i \in N$:
  - $R_L(u_i) = \{b^{i-1}\}$.
- Also gilt für alle Wörter u_i und u_k mit $i \neq k$:
  - $R_L(u_i) \neq R_L(u_k)$.

Folglich hat die Nerode-Relation R_L hier unendlich viele Äquivalenzklassen.

Grenzen endlicher Automaten

Zentraler Hilfssatz (Begründung folgt)

- Sei A ein endlicher Automat über dem Alphabet Σ mit Zustandsmenge Z, und es sei L = L(A). Dann gilt:

> Die Klasseneinteilung, die die Nerode-Relation R_L induziert, hat höchsten |Z| Äquivalenzklassen.

Wichtigste Folgerungen:

> Bei vorgegebenem endlichem Automaten A ist der kanonische Automat A(L(A)) ein Minimalautomat zu A.

> Genau dann ist eine gegebene Sprache L eine Automatensprache, wenn der kanonische Automat A(L) ein endlicher Automat ist.

▶ Zentraler Hilfssatz, Begründung

- Sei $A = [Z,\Sigma,z_0,F,\delta]$ ein endlicher Automat und $L = L(A)$.
- Dann gilt offenbar für alle $u \in \Sigma^*$:
  - $u_i^{-1}(L) = L(A,\delta^*(z_0,u))$ ⟸ *… Wörter, die vom „Zustand nach u" zu einem Zustand aus F führen*
- Also gilt für alle $u_1,u_2 \in \Sigma^*$:
  - $\delta^*(z_0,u_1) = \delta^*(z_0,u_2) \Rightarrow L(A,\delta^*(z_0,u_1)) = L(A,\delta^*(z_0,u_2))$
    $\Rightarrow u_1^{-1}(L) = u_2^{-1}(L) \Rightarrow u_1 R_L u_2$
  - Gibt es k verschiedene Äquivalenzklassen der Nerode-Relation R_L, dann auch k paarweise nicht äquivalente Wörter $u_1, u_2, \ldots u_k$, nach dem vorigen also auch k verschiedene Zustände $\delta^*(z_0,u_1), \ldots \delta^*(z_0,u_k)$.
  - Somit gibt es wegen $k \le |Z|$ höchstens $|Z|$ solche Äquivalenzklassen.

▶ Konsequenzen

Um für eine gegebene Sprache L zu überprüfen, ob es einen endlichen Automaten A mit L(A) = L gibt, kann man wie folgt vorgehen:

- Stelle fest, ob die Klasseneinteilung, die die Nerode-Relation R_L induziert, endlich oder unendlich viele Äquivalenzklassen hat.
  - Falls es endlich viele sind, gibt es einen endlichen Automaten A mit L(A) = L.
  - Falls es unendlich viele sind, gibt es keinen endlichen Automaten A mit L(A) = L.

Hinweis: Dieser Ansatz greift im Prinzip immer.
Es ist nur manchmal nicht ganz leicht festzustellen, wie viele Klassen es gibt.

Grenzen endlicher Automaten

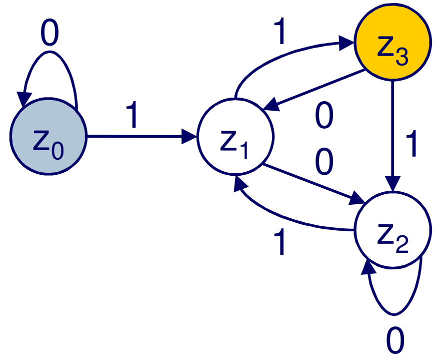
▶ weiteres Vorgehen

- Wir schauen uns jetzt eine weitere Eigenschaft der Sprachen an, die mit endlichen Automaten beschrieben werden können.

- Dabei konzentrieren wir uns auf unendliche Sprachen und fragen uns, wie ein endlicher deterministischer Automat Wörter verarbeitet, die mindestens so viele Zeichen haben, wie der Automat Zustände hat.

Grenzen endlicher Automaten

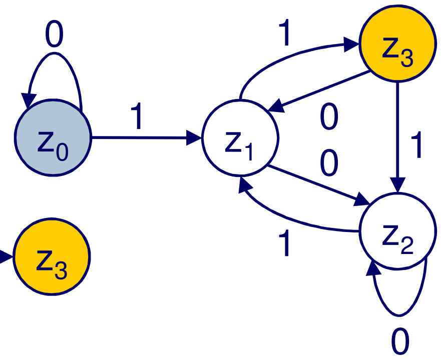
▶ Beispiel



- Wir betrachten das folgende Wort $w \in L(A)$:
  - $w = a_1a_2a_3a_4 = 1011$
- A verarbeitet das Wort $w \in L(A)$ wie folgt:
  - Start in $z_{0;}$ $\delta(z_0,a_1) = z_1$, $\delta(z_1,a_2) = z_2$, $\delta(z_2,a_3) = z_1$ und $\delta(z_1,a_4) = z_3$
- **Konsequenz:**
  - bei der Verarbeitung des Wortes w werden fünf Zustände besucht: der Startzustand und die vier Zustände, die besucht werden, wenn a_1, a_2, a_3 bzw. a_4 verarbeitet wurden.
  - Da A nur vier Zustände hat, muss deshalb mindestens ein Zustand mehrfach besucht werden

Vergleiche: Schleifen-Lemma für Wege!

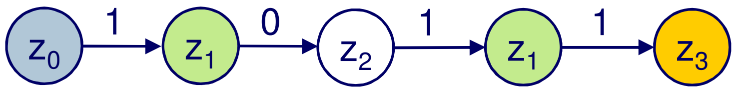
▶ Beispiel (weiter)



- A verarbeitet das Wort 1011 $\in$ L(A) wie folgt:

1	0	1	1

$\Rightarrow$



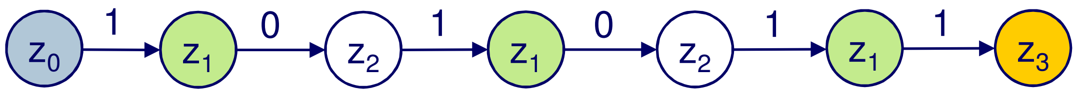
$\Rightarrow$ $1 \circ 01 \circ 1 = u \circ v \circ w = u \circ v^1 \circ w \in L(A)$

- Da der Zustand z_1 zweimal besucht wird, können wir das Wort w in die Bestandteile u=1, v=01 und w=1 zerlegen mit:
  - $\delta^*(z_0,u) = z_1$, $\delta^*(z_1,v) = z_1$, $\delta^*(z_1,w) \in F$, so dass
  - für alle k $\in N_0$ das Wort $u \circ v^k \circ w$ ebenfalls zur Sprache L(A) gehört, z.B.

1	0	1	0	1	1

(k=2)

$\Rightarrow$

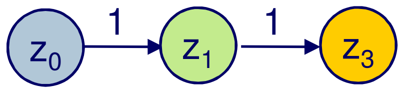


$\Rightarrow$ $1 \circ 0101 \circ 1 = u \circ vv \circ w = u \circ v^2 \circ w \in L(A)$

1	1

(k=0)

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $1 \circ \varepsilon \circ 1 = u \circ v^0 \circ w \in L(A)$

Grenzen endlicher Automaten

- Hilfsbegriff (Aufpumpbarkeit)

  - Es sei $s \in L \subseteq \Sigma^*$.
  - Es sei $n \in N$.

s heißt n-aufpumpbar in L, falls es Wörter u, v, w $\in \Sigma^*$ gibt, für die gilt:

- $s = u \circ v \circ w$, $|u \circ v| \leq n$ und $|v| \geq 1$,
- $u \circ v^k \circ w \in L$ für alle $k \in N_0$.

k=0 ist eher „Luft ’rauslassen“ als aufpumpen.

- ... und die „Kontraposition“ (Nicht- Aufpumpbarkeit)

s ist nicht n-aufpumpbar in L gdw. für alle Wörter u, v, w $\in \Sigma^*$ gilt:

- Wenn die Bedingungen $s = u \circ v \circ w$, $|u \circ v| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt sind, so gilt $u \circ v^k \circ w \notin L$ für mindestens ein $k \in N_0$.

Beispiele

- Es sei $L = \{ 111 \} \cup \{ 1 \circ 0^t \mid t > 0 \}$

  Dann gilt:

  - $s = 100$ gehört zu L und ist 2-aufpumpbar in L :
    - Wähle $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$

  - $s = 111$ gehört zu L und ist nicht 2-aufpumpbar in L :
    - Egal, wie u,v, und w gewählt werden gilt, $u \circ v^2 \circ w \notin L$.

  - Jedes Wort $s \in L$ mit $|s| \geq 4$ ist 2-aufpumpbar in L :
    - $s = 1 \circ 0 \circ s'$. Wähle $u = 1$, $v = 0$, $w = s'$.

Grenzen endlicher Automaten

- Pumping-Lemma für Automatensprachen

Beweis wie beim Schleifen-Lemma für Wege!

- Ist L eine unendliche Sprache, dann gilt:

Wenn es einen endlichen Automaten A mit L(A)=L gibt,
dann gibt es eine Zahl $n \in N$, so dass
jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ ein n-aufpumpbares Wort ist
(die sog. Pumping-Eigenschaft).

- Logisch äquivalente Formulierung (Kontraposition)

- Ist L eine unendliche Sprache, dann gilt:

und bei endlichen Sprachen? → S.25

Wenn es zu jeder Zahl $n \in N$ ein Wort $s_n \in L$ mit $|s_n| \geq n$ gibt,
das nicht n-aufpumpbar ist (No-Pumping-Eigenschaft)
so gibt es keinen endlichen Automaten A mit L(A).

⇧

*... leider **nicht** „Genau dann, wenn“ , denn manche Nicht-Automatensprachen „erfüllen“ das Pumping-Lemma auch.*

Verwendung

- Um zu zeigen, dass es für eine gegebene Sprache L keinen endlichen Automaten A mit L(A) = L gibt, benutzt man die Kontraposition des Pumping-Lemmas und geht wie folgt vor:
  - Man zeigt, dass es zu jedem $n \in N$ ein Wort $s_n \in L$ mit $|s_n| \geq n$ gibt, das nicht n-aufpumpbar ist

Für jedes n bezeugt das Wort s_n, dass es keinen endlichen Automat A mit n Zuständen gibt, für den L = L(A) gilt.

- Man will also zeigen, dass es zu jedem $n \in N$ ein Wort $s_n \in L$ mit $|s_n| \geq n$ gibt, so dass für alle Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ gilt:
  - Wenn die Bedingungen $s_n = u \circ v \circ w$, $| u \circ v | \leq n$ und $| v | \geq 1$ erfüllt sind, so gilt für mindestens ein $k \in N$ $u \circ v^k \circ w \notin L$.

Beispiel für das „No-Pumping-Lemma“

- Sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ hat genauso viele Nullen wie Einsen $\}$
- Wir wollen zeigen, dass es keinen endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ gibt.

- Es sei nun $n \in N$
- Wir wählen das Wort $s_n = 1^n \circ 0^n$ (Offenbar gilt $s_n \in L$ und $|s_n| \geq n$.)

- Es seien u,v und w so gewählt, dass $s_n = u \circ v \circ w$, $|u \circ v| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gilt
- Also gilt:
  - $u = 1^{|u|}$, $v = 1^{|v|}$ und $w = 1^{n-|u \circ v|}\ 0^n$

- Daher gilt für das Wort $u \circ v^2 \circ w$ (Wir nehmen also $k = 2$):
  - $u \circ v^2 \circ w = 1^{|u|} \circ 1^{2|v|} \circ 1^{n-|u \circ v|}\ 0^n = 1^{n+|v|} 0^n$, und $n+|v|>n$,
  - also $u \circ v^2 \circ w \notin L$, da dieses Wort mehr Einsen als Nullen hat.

Grenzen endlicher Automaten

Anmerkungen

- Mit der Kontraposition des Pumping-Lemmas kann man offenbar nur für unendliche Sprachen L zeigen, dass es keinen endlichen Automaten A mit L(A) = L gibt. Man braucht ja unendlich viele Wörter.
- Das ist aber keine Einschränkung, weil man sich leicht überlegen kann, dass es für jede endliche Sprache L einen endlichen Automaten A mit L(A) gibt

... was wir auf mindestens drei Arten sehen können:

- *Die Nerode-Relation R_L hat nur endlich viele Äquivalenzklassen.*
- *Es gibt eine triviale Baum-Konstruktion für einen passenden Automaten.*
- *Es gibt nur endlich viele Restklassensprachen.*

Grenzen endlicher Automaten

▶ weitere Anmerkungen

- Unschön ist, dass es (natürlich unendliche) Sprachen L gibt, die
  - einerseits keine Automatensprachen sind,
    d.h. es gibt keinen endlichen Automaten A mit $L(A) = L$,

  und die

  - andererseits trotzdem die Pumping-Eigenschaft haben,
    d.h. es gibt ein $n \in N$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$
    n-aufpumpbar ist.

- Beispielsweise gilt mit

  $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und $L = \{ 0^n \circ 1^m \circ 0^m \mid n,m \in N \} \cup \{ 1^n \circ 0^m \mid n,m \in N_0 \}$

  - L ist keine Automatensprache.
  - Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 1$ ist ein 1-aufpumpbares Wort.

Wie sieht man das ein ? ☛

▶ weitere Anmerkungen

- Beispielsweise gilt mit

  $\Sigma = \{ 0,1 \}$ und $L = \{ 0^n \circ 1^m \circ 0^m \mid n,m \in N \} \cup \{ 1^n \circ 0^m \mid n,m \in N_0 \}$

  - L ist keine Automatensprache.
  - Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 1$ ist ein 1-aufpumpbares Wort.

Wie sieht man das ein ?

Etwa so:

- L hat unendlich viele Restsprachen (vgl. $a^n b^n$-Beispiel),
  bzw. ein Automat für L bräuchte ein unendlich großes Gedächtnis:
  Falls 0 vorne, wie viele 1en kamen bisher?
- W hat n>1 führende Nullen vorne →
  führende Null streich- und vervielfachbar zu Wort aus erster Menge.

  Einsame 0 vorne streichbar zu Wort aus zweiter Menge, vervielfachbar zu Wort erster Menge.

  Führende 1 vorne streichbar und vervielfachbar zu Wort aus zweiter Menge.