Kapitel 2: Formale Sprachen

Gliederung

Einordnung

▶ Algorithmische Sprachbeschreibung (durch Lösung des Wortproblems)

- Im letzten Kapitel lernten wir einen Ansatz kennen, Sprachen zu beschreiben, indem man direkt ein „Programm“ zur Lösung des Wortproblems für die zu beschreibende Sprache angibt:

  Zur Sprache L(A) gehören alle Zeichenfolgen aus Σ^*, die der Automat A über dem Alphabet Σ akzeptiert.

- Informelles Rezept:

  Laufe beim Anfangszustand los - immer in Pfeilrichtung und mit dem Wort w als „Wegbeschreibung“.

  Wenn die Wegbeschreibung abgearbeitet ist, schaue nach, ob du in einem der akzeptierenden Zustände in F angekommen bist. Wenn ja, gehört die Wegbeschreibung zu L(A).

▶ Sprachbeschreibung durch Erzeugung von Wörtern

- Anstatt mit einem Automaten A beliebige Wörter darauf zu **überprüfen**, ob sie zu L(A) gehören, können wir den Automaten auch dazu verwenden, genau die Wörter in L(A) zu **erzeugen**:
- Informelles Rezept:
  Laufe immer wieder beim Anfangszustand los, stets in irgendeine Pfeilrichtung, und das beliebig lange. Protokolliere dabei die Zeichen an den durchlaufenen Pfeilen.
  Immer wenn du gerade in einem der akzeptierenden Zustände in F angekommen bist, ist dein bisheriges Reiseprotokoll ein Wort aus L(A).
  → systematischer?

*Bei den Automatensprachen dient der Automat **beidem**, sowohl der Worterzeugung als auch der Wortprüfung.*

*Ab jetzt lernen wir Sprachen kennen, bei denen sich die **Mechanismen** zur Worterzeugung von denen zur Wortprüfung **unterscheiden**.*

*Dann aber neu zu lösen → **Wortproblem***

Einordnung

Grammatiken – zunächst in natürlicher Sprache

- Regeln, Beispielmenge (**stark vereinfacht**)
  - <Hauptsatz> → <Subjekt> <Prädikat> <Objekt>.
  - <Subjekt> → Hans | Paul | Maria | Wir
  - <Prädikat> → mag | züchtet | rechnen
  - <Objekt> → Feten | Hunde | TI-Aufgaben
- Mithilfe dieser Regeln lassen sich u.a. die folgenden Hauptsätze bilden:
  - Hans mag Feten.
  - Wir rechnen TI-Aufgaben.

… aber auch
  - Paul rechnen Hunde. :-(

Gliederung

▶ Chomsky*-Grammatiken

Bestandteile einer Chomsky-Grammatik $G = (\Sigma,V,S,R)$

- ein endliches Alphabet Σ von Zeichen (Terminalzeichen)
- eine dazu disjunkte endliche Zeichenmenge V (Variablen, Nichtterminale)
- eine ausgezeichnete Startvariable $S \in V$
- eine endliche Menge R von Regeln (Produktionen)
  der Art $l \rightarrow r$ mit $l \in (\Sigma \cup V)^* \setminus \{ \varepsilon \}$ und $r \in (\Sigma \cup V)^*$

beabsichtigte Verwendung:

- *Eine Chomsky-Grammatik G soll die Sprache beschreiben, die alle Wörter $w \in \Sigma^*$ enthält, die man mit Ersetzung(en) gemäß den Regeln dieser Grammatik aus der Startvariablen ableiten kann.*

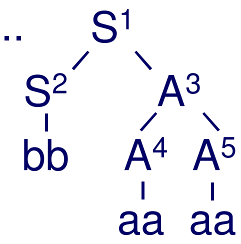
*) Noam Chomsky, Sprachwissenschaftler und Linksintellektueller,
zwischen 1980 und 1992 die am häufigsten zitierte lebende Person der Welt

Beispiel einer Ableitung

- Grammatik G = (Σ,V,S,R) mit:
  - Σ = { a,b }
  - V = { S,A }
  - den folgenden Regeln in der Regelmenge R:
    - $S \to SA$ und $S \to bb$
    - $A \to AA$ und $A \to aa$
- Aus der Startvariablen S kann man das Wort w = bbaaaa wie folgt ableiten:
  - $S \to_G \boxed{SA} \to_G \boxed{bb}A \to_G bb\boxed{AA} \to_G bb\boxed{aa}A \to_G bbaa\boxed{aa}$

  (linke Seite $\to$ $\boxed{\text{rechte Seite}}$)

  vgl. mit ...



▶ zentrale Hilfsbegriffe: Ableitung in einem Schritt

- Es sei $G = [\Sigma,V,S,R]$ eine Grammatik.
- Es seien $u, v \in (\Sigma \cup V)^*$.

v ist genau dann in einem Schritt (bzw. unmittelbar) mit den Regeln von G aus u ableitbar (Formelschreibweise: $u \rightarrow_G v$),

wenn es Zeichenketten $x,y \in (\Sigma \cup V)^*$
und eine Regel $l \rightarrow r \in R$ gibt, so dass gilt:

- $u = x \circ l \circ y$
- $v = x \circ r \circ y$

Eine Regel $l \rightarrow r$ kann auf das Wort u angewendet werden, wenn das Wort u die linke Seite l dieser Regel als Teilwort enthält.

Das Ergebnis der Anwendung der Regel $l \rightarrow r$ ist das Wort v, das man erhält, wenn man in u das Teilwort l durch die rechte Seite r dieser Regel ersetzt.

zentrale Hilfsbegriffe: Ableitung

- Es sei $G = [\Sigma, V, S, R]$ eine Grammatik.
- Es seien $u, v \in (\Sigma \cup V)^*$.

w ist (in endlich vielen Schritten) mit den Regeln von G aus u ableitbar (Formelschreibweise: $u \to_G^* w$),

wenn sich dies induktiv aus folgenden Regeln ergibt:

Induktionsanfang: u ist aus u ableitbar ($u \to_G^* u$)

Induktionsschritt: Ist v aus u ableitbar und w unmittelbar aus v ableitbar, so ist w aus u ableitbar; (Wenn $u \to_G^* v$ und $v \to_G w$, dann $u \to_G^* w$)

$u = u_0 \to_G u_1 \to_G \ldots \to_G u_n = w$

$\to_G^*$ *ist die reflexive transitive Hülle von* $\to_G$.

▶ zentraler Begriff: die durch eine Grammatik beschriebene Sprache

- Es sei $G = [\Sigma, V, S, R]$ eine Chomsky-Grammatik.
- Es sei $w \in \Sigma^*$.

- w gehört zur durch G beschriebenen Sprache L(G) gdw. sich w (in endlichen vielen Schritten) aus dem Startsymbol S ableiten lässt.

$$\boxed{L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \rightarrow_G^* w \}.}$$

L(G) enthält also genau alle Wörter $w \in \Sigma^*$, die man mit den Regeln der Grammatik G aus der Startvariablen ableiten kann.

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 1

- halbformale Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  L = { w | w ist Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl }

- *L enthält nur Zeichenketten, die die Symbole 0 und 1 enthalten;*
- *$0 \in L$, und jede Zeichenkette $w \in L$ außer $w = 0$ hat das Präfix 1 und das Suffix 00.*

- Chomsky-Grammatik G = [Σ,V,S,R] für L:

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 1

- halbformale Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  L = { w | w ist Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl }

- *L enthält nur Zeichenketten, die die Symbole 0 und 1 enthalten;*
- *$0 \in L$, und jede Zeichenkette $w \in L$ außer $w = 0$ hat das Präfix 1 und das Suffix 00.*

- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma, V, S, R]$ für L:

  $\Sigma = \{ 0,1 \}$
  $V = \{ S,A,B \}$
  S

$S \to 1A$	$S \to 0$	
$A \to 1A$	$A \to 0B$	
$B \to 0$	$B \to 0B$	$B \to 1A$

- *Variable ≈ welche Art Wort aus $\{0,1\}^*$ wird hier erwartet?*

  S: ist 0 oder hat Präfix 1 und Suffix 00
  A: hat Suffix 00
  B: ist 0 oder hat Suffix 00

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 2

- Sei $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält das Teilwort $000 \}$
- *Man kann sich leicht überlegen, dass sich jedes Wort $w \in L$ in der Form $w = u \circ 000 \circ v$ mit $u,v \in \Sigma^*$ schreiben lässt*
- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma,V,S,R]$ für L?

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 2

- Sei $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält das Teilwort 000 $\}$
- *Man kann sich leicht überlegen, dass sich jedes Wort $w \in L$ in der Form $w = u \circ 000 \circ v$ mit $u,v \in \Sigma^*$ schreiben lässt.*
- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma,V,S,R]$ für L:

$\Sigma = \{ 0, 1 \}$
$V = \{ S,A \}$
S

$S \rightarrow A000A$
$A \rightarrow \varepsilon$
$A \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 1A$

S: besteht aus 000 und davor und danach einem beliebigen 0-1 Wort
A: beliebiges 0-1-Wort

In einer der Regeln ist die rechte Seite kürzer als die linke.
Das will man oft nicht; warum sehen wir später.
Können wir das hier vermeiden? (Ad-hoc-Übung)

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 3

- informelle und mengentheoretische Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  $L = \{ ab, aabb, aaabbb, \ldots \} = \{ a^n \circ b^n \mid n \in N \}$

- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma, V, S, R]$ für L?

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 3

- informelle und mengentheoretische Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  $L = \{ ab, aabb, aaabbb, \dots \} = \{ a^n \circ b^n \mid n \geq 1 \}$

- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma, V, S, R]$ für L?

  $\Sigma = \{ a, b \}$
  $V = \{ S \}$
  S

  $S \rightarrow aSb$
  $S \rightarrow ab$

- *Zwiebelschichtentechnik*
  … auch z.B. für Klammerungen bei arithmetischen Termen verwendbar

  (Zwiebelschichten wachsen laut Internet von innen dazu, Bäume übrigens außen, unter der Rinde ☺)

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 4

- informelle und mengentheoretische Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  $L = \{ abc, aabbcc, aaabbbccc, ... \} = \{ a^n \circ b^n \circ c^n \mid n \geq 1 \}$

- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma, V, S, R]$ für L?

Suche nach passender Grammatik – Beispiel 4

- informelle und mengentheoretische Beschreibung der interessierenden Sprache L:

  $L = \{ abc, aabbcc, aaabbbccc, ... \} = \{ a^n \circ b^n \circ c^n \mid n \in N \}$

- Chomsky-Grammatik $G = [\Sigma, V, S, R]$ für L:

$\Sigma = \{ a,b,c \}$
$V = \{ S,H,C \}$
S

$S \rightarrow abc$
$S \rightarrow aHbc$
$H \rightarrow abC$
$H \rightarrow aHbC$
$Cb \rightarrow bC$
$Cc \rightarrow cc$

- *Zwiebelschichten- und*
- *Samenflugtechnik:*
  C ist der Same für ein c, kann nach rechts treiben und verwandelt sich nur an geeigneten Stellen in ein c.

Beispiel:
$S \rightarrow_G aHbc \rightarrow_G aaHbCbc \rightarrow_G aaabCbCbc \rightarrow_G aaabbCCbc \rightarrow_G$
$aaabbCbCc \rightarrow_G aaabbCbcc \rightarrow_G aaabbbCcc \rightarrow_G aaabbbccc$

▶ Das Wortproblem kann unüberwindlich sein.

- Wir kümmern uns jetzt um den algorithmischen Aspekt, es geht also um die Frage:
  - ob und wie man das Wortproblem für eine Sprache lösen kann, die man mit einer Chomsky-Grammatik beschrieben hat.

- Die generelle Antwort auf die Frage ist enttäuschend, da man zeigen kann, dass es Sprachen L mit folgenden Eigenschaften gibt:
  - Die Sprache L kann man mit einer Chomsky-Grammatik beschreiben.
  - Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, mit dem man das Wortproblem für die Sprache L lösen kann.

Um dieser Problematik aus dem Weg zu gehen, lässt man nicht alle Chomsky-Grammatiken als Beschreibungsmittel zu

Einschub: Immerhin gibt es ein Halbentscheidungs-Verfahren (0)

Vorarbeit: Bereitstellung des Werkzeugs Warteschlange

- Als Datenstruktur wird eine Warteschlange Q benutzt
  Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:
  - [ ] bezeichnet die leere Warteschlange.
  - [S] bezeichnet die Warteschlange mit dem einzigen Eintrag S.
  - Head(Q) bezeichnet das erste Element in einer nichtleeren Warteschlange Q.
  - Tail(Q) bezeichnet die Warteschlange, die übrig bleibt, wenn aus der nichtleeren Warteschlange Q das erste Element entfernt wird.
  - Add(Q,v) bezeichnet die Warteschlange, die entsteht, wenn das Element v ans Ende der Warteschlange Q angefügt wird.

▶ Einschub: Immerhin gibt es ein Halbentscheidungs-Verfahren (1)

- Es sei $G = [\Sigma,V,S,R]$ eine Grammatik
- Wenn man uns ein Wort vorlegt und fragt, ob es aus L(G) ist, dann wollen wir, zumindest im ja-Falle dies auch sicher herausfinden (und im nein-Falle evtl. ewig weiterrechnen)
- Dazu brauchen wir lediglich ein Programm, das systematisch alle Wörter von L(G) der Reihe nach produziert.

... Breitensuche (verwendet eine „Queue" Q)

1. Setze Q = [S], M = $\emptyset$.
   /* M =Menge der bisher erzeugten Wörter */
2. Wenn Q $\neq \emptyset$:
   - Bestimme das erste Element u:= Head(Q) in Q
   - Streiche u aus Q, d.h. Q:=Tail(Q).
   - Für alle v mit $u \rightarrow_G v$:
     - Hänge v ans Ende von Q, Q:=Add(Q,v)).
     - Falls $v \in \Sigma^*$, schreibe v in M (M:=M$\cup$\{v\}).
3. Gehe nach 2.

Testen?!
B.3: aabb
mit
$S \rightarrow aSb$
$S \rightarrow ab$

▶ Einschub: Immerhin gibt es ein Halbentscheidungs-Verfahren (2)

Durch systematisches sukzessives Ableiten kann man so alle Wörter, die zur Sprache L(G) gehören, erzeugen.

- **Wenn** ein Wort w zur Sprache L(G) gehört, genügt ein regelmäßiger Blick in die Menge M der bisher abgeleiteten Wörter, denn dann muss w irgendwann darin auftauchen.
- **Aber** solange das Ableitungsprogramm noch läuft und das Wort noch nicht erzeugt wurde, weiß man **nichts**:
  w könnte ja später noch abgeleitet werden**....**
- **Wenn** also ein Wort w **nicht** zur Sprache L(G) gehört und das Ableitungsprogramm ewig weiterläuft, was oft der Fall ist, dann weiß man mit diesem Verfahren „stets nichts“ , d.h. **nie** irgend etwas.

Gliederung

▶ kontextsensitive Grammatiken/Sprachen

- Es sei $G = [\Sigma, V, S, R]$ eine Grammatik

G heißt kontextsensitive oder monotone Grammatik, falls für alle Regeln $l \to r$ von G gilt:

- $|\,l\,| \leq |\,r\,|$ (d.h. die Regel $l \to r$ ist nicht verkürzend)

Eine Sprache L heißt kontextsensitive Sprache, falls es eine kontextsensitive Grammatik G mit $L = L(G)$ oder $L(G) \cup \{\varepsilon\}$ gibt[1].

Das leere Wort kann man mit einer kontextsensitiven Grammatik nicht aus S ableiten.

1) $L = L(G)$ oder $L(G) \cup \{\varepsilon\}$ und $\varepsilon \notin L(G)$ kann auch so geschrieben werden: $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Anmerkungen

- Chomsky-Grammatiken, die wir bisher definiert haben (Bsp. 1,3,4 → Folien 12-18), enthalten **keine** verkürzenden Regeln, sind also kontextsensitive Grammatiken – außer in Beispiel 2. Aber auch dort finden wir leicht eine geeignete **kontextsensitive** Grammatik.

- Eine Beschränkung auf kontextsensitive Grammatiken hat Vor- und Nachteile. Verzichtet man darauf, verkürzende Regeln zu benutzen, kann man …

  - einerseits bestimmte Sprachen nicht mehr beschreiben (Manche Sprachen kann man nur dann mit Chomsky-Grammatiken beschreiben, wenn man dabei verkürzende Regeln benutzt.),

  - sich anderseits aber sicher sein, dass das Wortproblem für jede so beschriebene Sprache lösbar ist:

- kontextsensitive Grammatiken/Sprachen: Wortproblem

Für jede kontextsensitive Sprache L
gibt es einen Algorithmus, der für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ entscheidet,
ob $w \in L$ oder $w \notin L$ gilt.

Ist $\varepsilon \in L$, kann in einem ersten Schritt $w=\varepsilon$ überprüft werden. Falls nein, geht es anschließend um die Zugehörigkeit zur Sprache $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ einer kontextsensitiven Grammatik G.

▶ kontextsensitive Grammatiken/Sprachen: Lösung des Wortproblems

- Es sei $G = [\Sigma,V,S,R]$ eine kontextsensitive Grammatik;
- es sei $w \in \Sigma^*$.

Idee: Breitensuche mit Länge als Abbruch-Kriterium
(Verwende eine „Queue“ Q und eine Menge E für alle bereits „erledigten“ (irgendwann in Q eingereihten) abgeleiteten Wörter.)

1. Setze $Q = [\,S\,]$, $E = \varnothing$.
2. Wenn $Q \neq [\ ]$:
   - Setze $u = \mathrm{Head}(Q)$, $Q = \mathrm{Tail}(Q)$.
   - Für alle v mit $u \rightarrow_G v$:
     - Falls $v = w$, gib „$w \in L(G)$“ aus und stoppe;
     - Falls $|v| \leq |w|$ und $v \notin E$ gilt,
       setze $E = E \cup \{v\}$, $Q = \mathrm{Add}(Q,v)$.
   - Gehe nach (2).
3. Gib „$w \notin L(G)$“ aus und stoppe.

Testen?!
B.3 aaabb

- E ist verzichtbar. Es verhindert nur unnötige Wiederholungen.

▶ Beurteilung der algorithmischen Idee

- Nach endlich vielen Schritten wird ein korrektes **Ergebnis** ausgegeben, denn …
  - Es gibt überhaupt nur endlich viele Zeichenketten der Länge kleiner/gleich |w| über $\Sigma \cup V$;
  - es werden sukzessive alle überhaupt ableitbaren Zeichenketten der Länge kleiner/gleich |w| zur „Queue“ Q hinzugefügt,
  - wenn auch nicht unbedingt in einer besonderen Reihenfolge.

- Der Algorithmus ist leider (trotz E-Benutzung) hoffnungslos **ineffizient**. Aber es ist kein qualitativ besserer Algorithmus bekannt, und man vermutet, dass es keinen besseren gibt.

- Wir werden in diesem Kapitel noch spezielle Typen von Chomsky-Grammatiken kennenlernen, für deren Sprachen das Wortproblem sogar **effizient** lösbar ist.

Gliederung

Begriffe: Weitere Typen von Chomsky-Grammatiken

- Es werden vier Typen unterschieden:
  - Typ-0 Grammatiken (/* Synonym: Chomsky-Grammatiken)

    Sprachen, die man mit Typ-0 Grammatiken beschreiben kann, nennt man rekursiv aufzählbare Sprachen.
  - Typ-1 Grammatiken (/* Synonym: kontextsensitive Grammatiken)

    Sprachen, die man mit Typ-1 Grammatiken beschreiben kann, nennt man kontextsensitive Sprachen.
  - Typ-2 Grammatiken (/* Synonym: kontextfreie Grammatiken)

    Sprachen, die man mit Typ-2 Grammatiken beschreiben kann, nennt man kontextfreie Sprachen.
  - Typ-3 Grammatiken (/* Synonym: reguläre Grammatiken)

    Sprachen, die man mit Typ-3 Grammatiken beschreiben kann, nennt man reguläre Sprachen.

L beschreiben soll heißen: $L \setminus \{\varepsilon\}$ *erzeugen.*

Kapitel 2: Formale Sprachen

Typen von Chomsky-Grammatiken

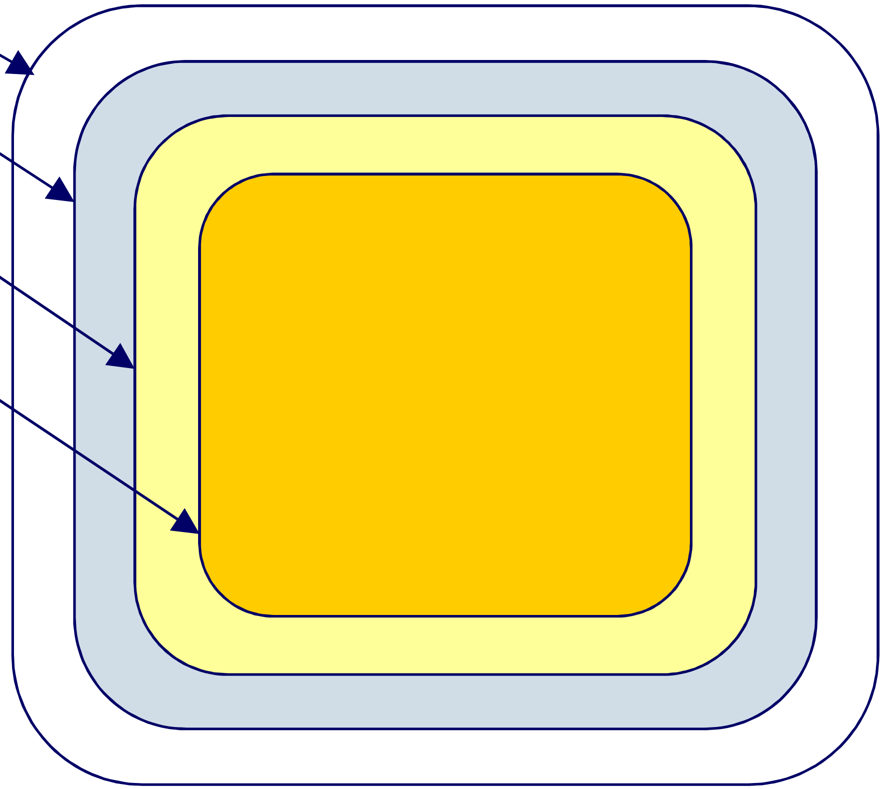
- Hierarchie der Sprachklassen

rekursiv aufzählbare Sprachen

kontextsensitive Sprachen

kontextfreie Sprachen

reguläre Sprachen



Gliederung

Typen von Chomsky-Grammatiken

- kontextfreie (Typ-2-) Grammatiken/Sprachen

Es sei $G = [\Sigma, V, S, R]$ eine Chomsky-Grammatik.

G heißt kontextfreie Grammatik, wenn für alle Regeln $l \rightarrow r$ von G gilt:

- $l \in V$ (d.h. die linke Seite der Regel ist eine Variable)
- $r \neq \varepsilon$ (d.h. die rechte Seite der Regel ist ein nichtleeres Wort aus $(\Sigma \cup V)^*$)

Eine Sprache L heißt kontextfreie Sprache, falls es eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ oder $L(G) \cup \{\varepsilon\}$ gibt.

Auch eine kontextfreie Grammatik kann keine verkürzenden Regeln enthalten, ist also monoton (kontextsensitiv).

Typen von Chomsky-Grammatiken

Anmerkungen

- Da keine kontextfreie Grammatik verkürzende Regeln enthält, also jede gleichzeitig eine kontextsensitive Grammatik ist, weiß man folgendes:
  - Jede kontextfreie Sprache ist gleichzeitig eine kontextsensitive Sprache*.
  - Für jede kontextfreie Sprache ist das Wortproblem lösbar (sogar effizient, wie wir noch sehen werden).

- Wir haben bereits einige Beispiele kontextfreier Sprachen gesehen:
  - Beispiel 1: durch 4 teilbare Binärzahlen
  - Beispiel 2: $\{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält Teilwort } 000 \}$
(kontextfrei zumindest nach der „Reparatur“ der Grammatik)
  - Beispiel 3: $\{ a^n \circ b^n \mid n \geq 1 \}$

Typen von Chomsky-Grammatiken

Mathematik/Informatik-Deutsch

Mathematische Bezeichnungen folgen nicht unbedingt sprachlich intuitiven Gepflogenheiten, was zwei Beispiele aus der Algebra zeigen sollen:

- Eine Halbgruppe ist weder eine besondere noch ein Teil einer Gruppe. Vielmehr ist eine Gruppe eine besondere Art von Halbgruppe.
- Ein Schiefkörper ist nicht eine besondere Art von Körper. Vielmehr ist ein Körper eine besondere Art von Schiefkörper.

Und in der theoretischen Informatik haben wir jetzt kontextfreie und kontextsensitive Grammatiken kennengelernt,

- ohne dass irgendwelche Parallelen oder Gegensätze in den Definitionen erkennbar wären,
- noch der Bezug zu einem „Kontext“ (Umgebung, Zusammenhang).

▶ kontextsensitiv vs. kontextfrei, Wort-Herkunft

Der Begriff „kontextsensitiv" wird im Vergleich zu „kontextfrei" klarer wenn wir eine andere Art von Grammatiken betrachten:

- Es sei G = [Σ,V,S,R] eine Grammatik.

G heißt (hier zur Unterscheidung) klassisch-kontextsensitive Grammatik, falls für alle Regeln $l \to r$ von G gilt:

- Es existieren u, v, w $\in (\Sigma \cup V)^*$ mit $v \neq \varepsilon$, und ein $x \in V$, so dass $l = uxw$ und $r = uvw$.

„$x \to v$ in der Umgebung (Kontext) u…w."

<u>Spezialfall</u>: Wenn stets $u = w = \varepsilon$ gilt, dann ist G <u>kontextfrei</u>.

Ohne Beweis:

Kontextsensitive (monotone) und klassisch-kontextsensitive Grammatiken erzeugen die gleiche Familie von (kontextsensitiven) Sprachen.

Typen von Chomsky-Grammatiken

▶ reguläre (Typ-3-) Grammatiken/Sprachen

- Es sei $G = [\Sigma, V, S, R]$ eine Chomsky-Grammatik

G heißt reguläre Grammatik, falls für alle Regeln $l \to r$ von G gilt:

- $l \in V$ (d.h. die linke Seite ist eine Variable)
- $r \in \Sigma$ (d.h. die rechte Seite ist ein Terminalzeichen)
  oder
  $r = xA$ mit $x \in \Sigma$ und $A \in V$ (die rechte Seite ist eine Konstante gefolgt von einer Variablen)

Eine Sprache L heißt reguläre Sprache, falls es eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ oder $L(G) \cup \{\varepsilon\}$ gibt.

Klar: Jede reguläre Grammatik ist kontextfrei.

Typen von Chomsky-Grammatiken

- Beispiele für Regelmengen

  - kontextsensitive Grammatik

$$
\begin{aligned}
S &\to abc\\
S &\to aHbc\\
H &\to abC\\
H &\to aAbC\\
Cb &\to bC\\
Cc &\to cc
\end{aligned}
$$

  - kontextfreie Grammatik

$$
\begin{aligned}
S &\to aSb\\
S &\to ab
\end{aligned}
$$

  - reguläre Grammatik

$$
\begin{aligned}
S &\to 1A\\
A &\to 0B\\
A &\to 1A\\
B &\to 0\\
B &\to 0B\\
B &\to 1A
\end{aligned}
$$

▶ Anmerkungen

- Da jede reguläre Grammatik gleichzeitig sowohl eine kontextsensitive als auch eine kontextfreie Grammatik ist, weiß man folgendes:
  - Jede reguläre *Sprache* ist gleichzeitig sowohl eine kontextsensitive als auch eine kontextfreie *Sprache*
  - Für jede reguläre Sprache ist das Wortproblem lösbar.
    Wir werden sehen, dass man es sogar besonders effizient lösen kann.

- Wir haben bisher in Beispiel 1 eine reguläre Grammatik kennengelernt.

- Wir werden aber sehen, dass auch in
  Beispiel 2 mit $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ enthält das Teilwort 000 $\}$ mit $\Sigma = \{ 0,1 \}$,
  eine reguläre Sprache vorliegt.

- Eine „reguläre Regelmenge“ für Beispiel 2

$S \to A000A$
$A \to \varepsilon$
$A \to 0A$
$A \to 1A$
(nicht regulär)

$\Sigma = \{ 0,1 \}$, $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ enthält Teilwort 000 $\}$

- Beginnend mit S erzeugen wir:
  - Eine beliebiges 0-1-Wort, $S \to 0S$, $S \to 1S$
  - und irgendwann 000, gefolgt von einem beliebigen 0-1-Wort, d.h. eine 0, gefolgt von einem Wort, das mit **Z**wei Nullen beginnt: $S \to 0Z$
- Aus Z erzeugen wir eine 0, gefolgt von einem Wort, das mit **E**iner Null beginnt: $Z \to 0E$
- E liefert 0 oder 0, gefolgt von einem **B**eliebigen nichtleeren 0-1-Wort: $E \to 0$, $E \to 0B$
- B erzeugt beliebiges nichtleeres 0-1-Wort, d.h. 0 oder 1, entweder alleine oder gefolgt von einem beliebigen nichtleeren 0-1-Wort : $B \to 0$, $B \to 0B$, $B \to 1$, $B \to 1B$

▶ Zusammenfassung und Übung: Chomsky-Grammatiken

Grammatiktyp	(zusätzliche) Einschränkung: linke Regelseite	rechte Regelseite	Regelsatzbeispiel* für L = {ab, abc}
Chomsky	$\neq \varepsilon$	–	???
kontextsensitiv = monoton	–	nicht kürzer als linke Seite	???
kontextfrei	$\in V$	–	???
regulär	–	x oder xY $x \in \Sigma$, $Y \in V$	???

*) *Jedes Regelsatzbeispiel soll jeweils **nicht** zur nächsten Klasse gehören.*

Typen von Chomsky-Grammatiken

- Zusammenfassung und Übung: Chomsky-Grammatiken - Lösungsbeispiele

Grammatiktyp	(zusätzliche) Einschränkung: linke Regelseite	rechte Regelseite	Regelsatzbeispiel* für L = {ab, abc}
Chomsky	$\neq \varepsilon$	–	$S \to abc$ $abc \to ab$
kontextsensitiv = monoton	–	nicht kürzer als linke Seite	$S \to XT$ $XT \to ab \mid abc$
kontextfrei	$\in V$	–	$S \to ab \mid abc$
regulär	–	x oder xY $x \in \Sigma$, $Y \in V$	$S \to aB$ $B \to b \mid bC$ $C \to c$

*) *Jedes Regelsatzbeispiel soll jeweils **nicht** zur nächsten Klasse gehören.*