

0. Einleitung und Grundbegriffe

1. Endliche Automaten

2. Formale Sprachen

3. Berechnungstheorie

4. Komplexitätstheorie

2.1. Chomsky-Grammatiken

2.2. Reguläre Sprachen

- Reguläre Grammatiken, ND-Automaten
- **Abgeschlossenheit**
- Reguläre Ausdrücke

2.3. Kontextfreie Sprachen

► Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

Die regulären Sprachen über einem Alphabet sind abgeschlossen gegenüber Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplement:

Es seien Σ das zugrunde liegende Alphabet und $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann gilt:

- Die Sprache $L_1 \cup L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $L_1 \cap L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $\text{co}(L_1)$, d.h. $\Sigma^* \setminus L_1$, ist eine reguläre Sprache.

Diese Zusammenhänge kann man nutzen, um Grammatiken bzw. endliche Automaten für „komplexere“ reguläre Sprachen zu konstruieren.

► Einfache Zusammenhänge

- Die sogenannten De Morganschen Gesetze der Mengenlehre liefern Beziehungen zwischen den Operationen Durchschnitt, Differenz und Komplement bzw. Vereinigung
- und damit auch zwischen Abgeschlossenheitseigenschaften:

Wegen ...	folgt Abgeschl. geg. ...	aus Abgeschlossenheit gegen ...
$L_1 \cup L_2 = \text{co}(\text{co}(L_1) \cap \text{co}(L_2))$	Vereinigung	Komplement und Durchschnitt
$L_1 \cap L_2 = \text{co}(\text{co}(L_1) \cup \text{co}(L_2))$	Durchschnitt	Komplement und Vereinigung
$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \text{co}(L_2)$	Differenz	Komplement und Durchschnitt
$\text{co}(L_1) = \Sigma^* \setminus L_1$	Komplement	Differenz (Σ^* ist regulär.)
usw.		

Daher brauchen wir uns hier auch nur z.B. um Komplement und Durchschnitt zu kümmern.

► Anmerkungen

- Beim Nachweis der Abgeschlossenheit gegen Durchschnitt und Komplement nutzen wir aus, dass es zu jeder regulären Sprache L einen (deterministischen) endlichen Automaten A mit $L(A) = L$ gibt
- Bezüglich des Durchschnitts ist deshalb nur zu zeigen, dass für alle (deterministischen) endlichen Automaten A_1 und A_2 gilt:
 - Es gibt einen (deterministischen) endlichen Automaten A' für die Sprache $L(A_1) \cap L(A_2)$.
- Bezüglich des Komplements ist deshalb nur zu zeigen, dass für alle (deterministischen) endlichen Automaten A_1 gilt:
 - Es gibt einen (deterministischen) endlichen Automaten A' für die Sprache $\Sigma^* \setminus L(A_1)$.

Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- ▶ Einschub: Vereinigung regulärer Sprachen auch *direkt* behandelbar,
– ohne den Umweg über Durchschnitt und Komplement –
nämlich anhand der *Grammatiken* (Beispiel)

- Es sei $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \cdot 11 \cdot w \mid v, w \in \Sigma^* \}$
- Es sei $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gerade viele } 0\text{'en und } |w| > 0 \}$

$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$
 $A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1 \mid 1B_1$
 $B_1 \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0B_1 \mid 1B_1$

$S_2 \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$
 $A_2 \rightarrow 0 \mid 0B_2 \mid 1A_2$
 $B_2 \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$

- Eine reguläre Grammatik für $L_1 \cup L_2$ enthält alle obigen Regeln und die folgenden neuen Regeln, wobei S das Startsymbol ist

$S \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$

$S \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$

*allgemeines Rezept
überlegen ...*

► Operation: Durchschnitt (Beispiel)

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 10 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.
- Es sei $L_2 = \{ v \circ 01 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

*Frage: Ist die Sprache $L_1 \cap L_2$ auch regulär?
($L_1 \cap L_2$ enthält alle Wörter aus Σ^* , die sowohl das Teilwort 10 als auch das Teilwort 01 enthalten.)*

► Operation: Durchschnitt (Automaten-orientierter Ansatz)

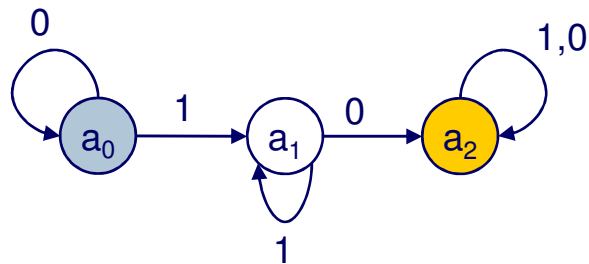
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_1 mit $L(A_1) = L_1$.*
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_2 mit $L(A_2) = L_2$.*
- *Benutze A_1 und A_2 , um einen endlichen Automaten A° mit $L(A^\circ) = L_1 \cap L_2$ zu konstruieren.*
 - ***Idee 1:** A° soll nachvollziehen, wie A_1 und A_2 gleichzeitig eine Zeichenfolge abarbeiten.*
 - ***Idee 2:** Ein Wort liegt genau dann in $L_1 \cap L_2$, wenn es von A_1 **und** A_2 akzeptiert wird.*

Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

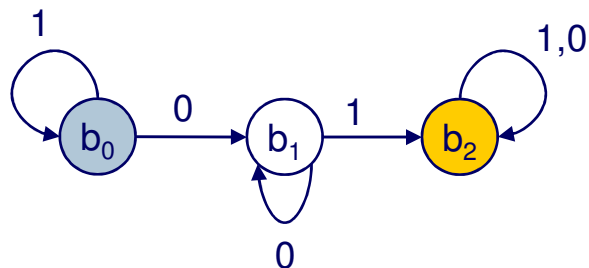
- ▶ Operation: Durchschnitt (Beispiel (weiter))

$A_1 = [Z_1, \Sigma, a_0, F_1, \delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$



$A^\circ = [Z^\circ, \Sigma^\circ, z^\circ_0, F^\circ, \delta^\circ]$ mit $L(A^\circ) = L_1 \cap L_2$

$A_2 = [Z_2, \Sigma, b_0, F_2, \delta_2]$ mit $L(A_2) = L_2$



$Z^\circ \setminus \Sigma$	0	1
$\langle a_0, b_0 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_1, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_0 \rangle$
$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$

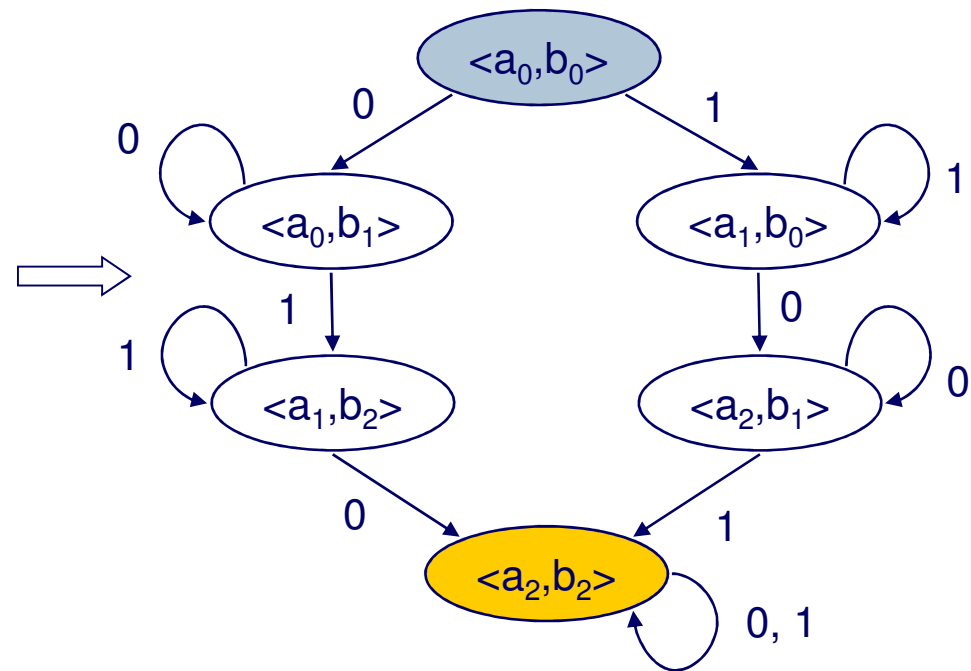
Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- ▶ Operation: Durchschnitt (Beispiel - Erreichbarkeit spart Arbeit)

$$A^\circ = [Z^\circ, \Sigma^\circ, z^\circ_0, F^\circ, \delta^\circ] \text{ mit } L(A^\circ) = L_1 \cap L_2$$

$Z^\circ \setminus \Sigma$	0	1
$\langle a_0, b_0 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_1, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_0 \rangle$
$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$



Hinweis: Nicht vom Anfangszustand aus erreichbare Zustände dürfen fehlen.

► Operation: Durchschnitt (allgemein)

- Es sei $A_1 = [Z_1, \Sigma, z_0, F_1, \delta_1]$ und $A_2 = [Z_2, \Sigma, y_0, F_2, \delta_2]$ deterministische endliche Automaten mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$.
- Konstruiere den zu A_1 und A_2 gehörenden Produktautomaten $A^\circ = [Z^\circ, \Sigma, z^\circ_0, F^\circ, \delta^\circ]$ mit $L(A^\circ) = L_1 \cap L_2$ wie folgt:

- Setze $Z^\circ := Z_1 \times Z_2$
- Setze $z^\circ_0 := (z_0, y_0)$
- Setze $F^\circ := \{ (z, y) \mid z \in F_1 \text{ und } y \in F_2 \}$.
- Für jedes $(z, y) \in Z^\circ$ und alle $a \in \Sigma$:
 - setze $\delta^\circ((z, y), a) := \langle \delta_1(z, a), \delta_2(y, a) \rangle$.

Wie beim Potenzmengenautomaten umgeht man auch gerne nicht erreichbare Zustände von vornherein ...

► Operation: Komplement (Beispiel)

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 11 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$,
d.h. die Sprache aller Wörter mit Teilwort 11.

Frage: Ist die Sprache $co(L_1)$ auch regulär? ($co(L_1)$ enthält alle Wörter aus Σ^ , in denen das Teilwort 11 nicht vorkommt.)*

► Operation: Komplement (Idee)

- *Konstruiere einen endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$.*
- *Benutze A , um einen endlichen Automaten A° mit $L(A^\circ) = co(L_1)$ zu konstruieren.*
 - **Idee** : A° soll genau dann akzeptieren, wenn A **nicht** akzeptiert, d.h. wenn man sich gewissermaßen in A bewegt, aber genau in den Zuständen außerhalb F (von A) akzeptiert.

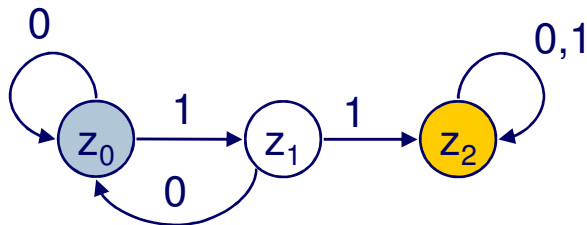
Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

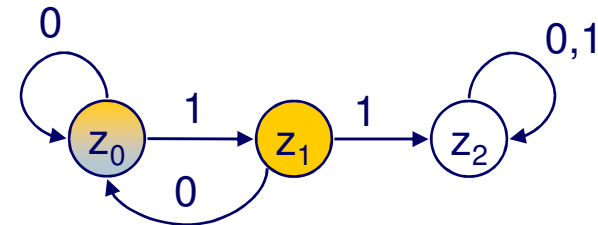
► Operation: Komplement (Beispiel (weiter))

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 11 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

$A = [Z, \Sigma, z_0, F, \delta]$ mit $L(A) = L_1$



$A^\circ = [Z, \Sigma, z_0, F^\circ, \delta]$ mit $L(A^\circ) = \text{co}(L_1)$



$F^\circ = Z \setminus F$ – erledigt!

... A° nennt man den Komplementautomaten von A_1

► Operation: Komplement (allgemein)

- Sei $A = [Z, \Sigma, z_0, F, \delta]$ ein (deterministischer) endlicher Automat für L_1 .
- Definiere den zu A_1 gehörenden Komplementautomaten $A' = [Z, \Sigma, z_0, F', \delta]$ wie folgt:

$$\bullet \text{ Setze } F' := \{ z \mid z \notin F \} = Z \setminus F$$

- Da die Mengen $K_A(z)$ eine Klasseneinteilung auf Σ^* definieren und $L(A)$ die Vereinigung aller Mengen $K_A(z)$ mit $z \in F$ ist, folgt sofort, dass $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$ gilt.

► Operation: Differenz (Beispiel für Konstruktion in 2 bekannten Schritten)

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 10 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.
- Es sei $L_2 = \{ v \circ 01 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

Frage: Ist die Sprache $L_1 \setminus L_2$ auch regulär? ($L_1 \setminus L_2$ enthält alle Wörter aus Σ^ , die das Teilwort 10 enthalten und das Teilwort 01 nicht enthalten.)*

► Operation: Differenz (Idee)

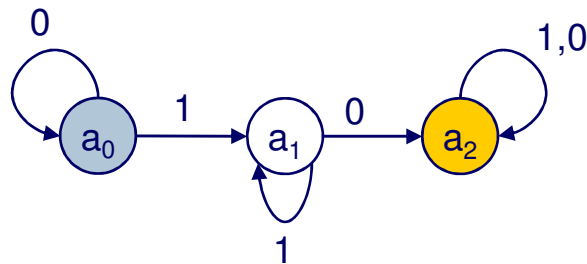
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_1 mit $L(A_1) = L_1$.*
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_2 mit $L(A_2) = L_2$.*
- *Benutze A_2 um einen endlichen Automaten A_3 mit $L(A_3) = co(L_2)$ zu konstruieren.*
- *Benutze A_1 und A_3 , um einen endlichen Automaten A° mit $L(A^\circ) = L_1 \cap co(L_2) = L_1 \setminus L_2$ zu konstruieren.*

Kapitel 2: Formale Sprachen

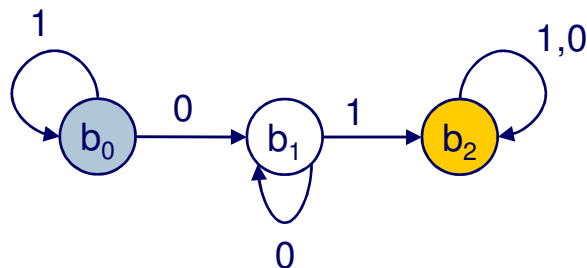
Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- ▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

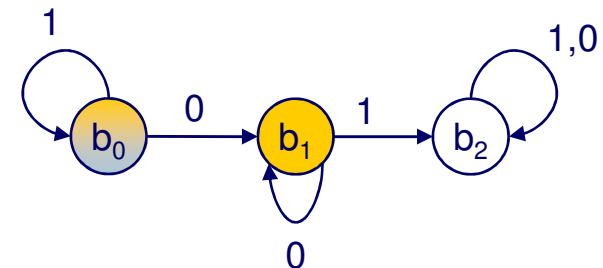
$A_1 = [Z_1, \Sigma, a_0, F_1, \delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$



$A_2 = [Z_2, \Sigma, b_0, F_2, \delta_2]$ mit $L(A_2) = L_2$



$A_3 = [Z_3, \Sigma, b_0, F_3, \delta_3]$ mit $L(A_3) = \text{co}(L_2)$

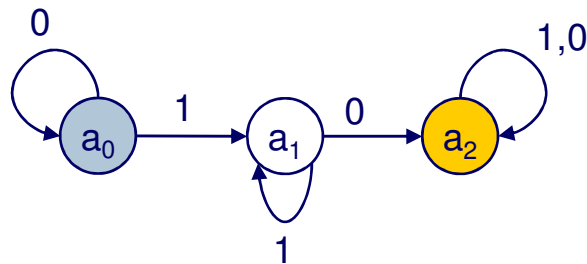


Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

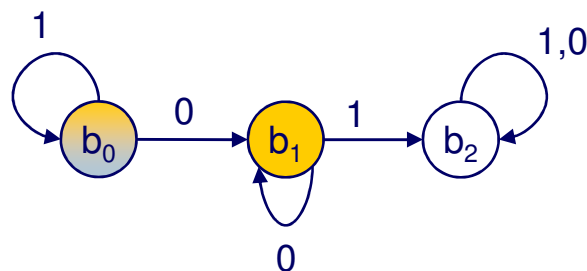
► Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$A_1 = [Z_1, \Sigma, a_0, F_1, \delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$



$A^\circ = [Z^\circ, \Sigma^\circ, z_0^\circ, F^\circ, \delta^\circ]$ mit $L(A^\circ) = L_1 \cap \text{co}(L_2)$

$A_3 = [Z_3, \Sigma, b_0, F_3, \delta_3]$ mit $L(A_3) = \text{co}(L_2)$



Z°/Σ	0	1
$\langle a_0, b_0 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_1, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_0 \rangle$
$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$

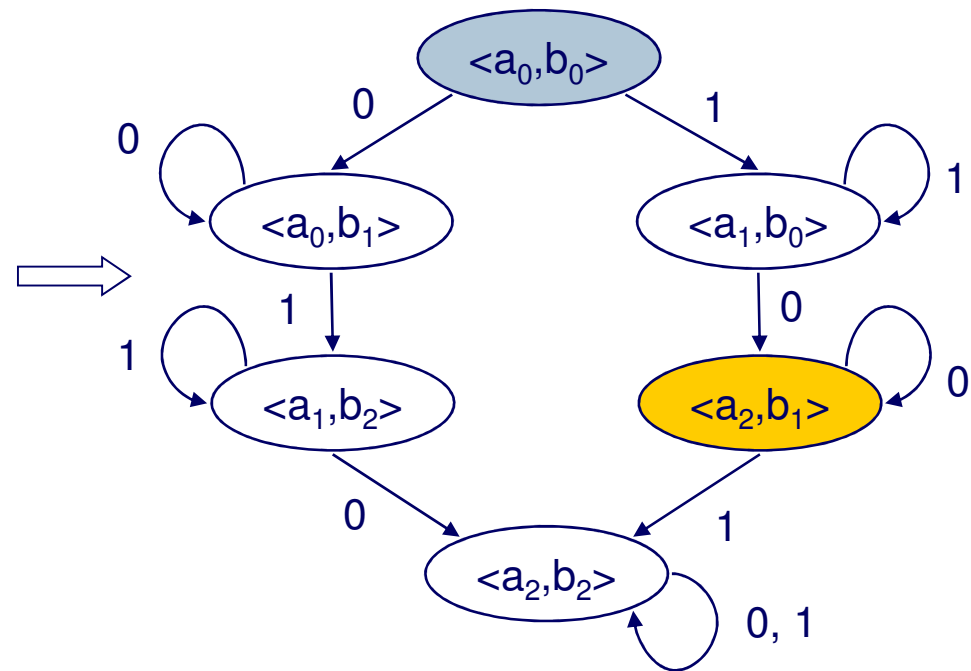
Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- ▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$$A^\circ = [Z^\circ, \Sigma^\circ, z_0^\circ, F^\circ, \delta^\circ] \text{ mit } L(A^\circ) = L_1 \cap \text{co}(L_2) = L_1 \setminus L_2$$

Z°/Σ	0	1
$\langle a_0, b_0 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_0, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_0, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_0 \rangle$
$\langle a_1, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_1, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_0 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_0 \rangle$
$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$
$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$



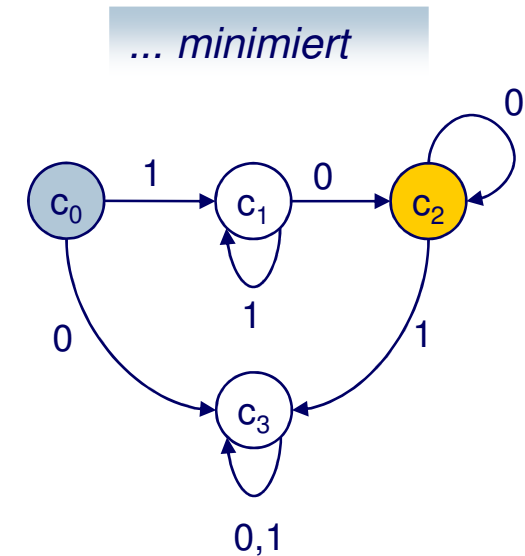
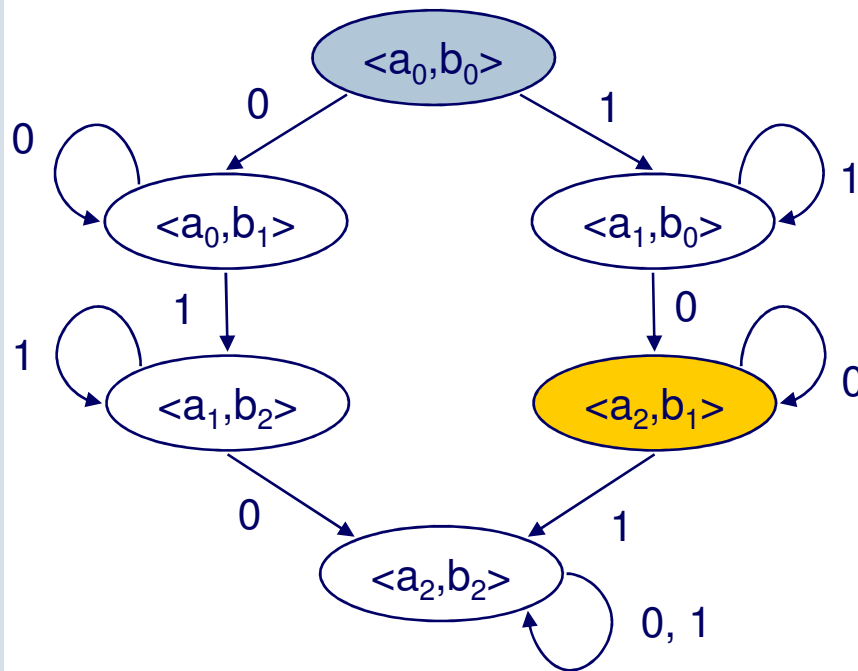
Hinweis: Nicht vom Anfangszustand aus erreichbare Zustände dürfen fehlen.

Kapitel 2: Formale Sprachen

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- ▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$$A^\circ = [Z^\circ, \Sigma^\circ, z_0^\circ, F^\circ, \delta^\circ] \text{ mit } L(A^\circ) = L_1 \cap \text{co}(L_2) = L_1 \setminus L_2$$



► Äquivalenzprüfung von Automaten mithilfe von Abgeschlossenheitseigenschaften

Die Abgeschlossenheitseigenschaften kann man auch benutzen, um folgende zwei algorithmischen Probleme zu lösen:

- Eingabe:
- zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ
- Ausgabe (1):
- Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$
- Ausgabe (2):
- Antwort auf die Frage, ob A_1 und A_2 **äquivalent** sind, d.h. *dieselbe Sprache* akzeptieren.

... ganz ohne Minimalautomaten!

Ist (1) gelöst, dann

kann (2) leicht beantwortet werden:

A_1 und A_2 sind äquivalent gdw. $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ und $L(A_2) \subseteq L(A_1)$

► Äquivalenzprüfung (weiter)

Wegen der De Morgan'schen Gesetze gilt für je zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma$:

- $L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap \text{co}(L_2) = L_1 \setminus L_2 = \emptyset$
- **Abgeleitetes Unterprogramm**

Eingabe: zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ

Ausgabe: Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ oder nicht

- 1) Bestimme den zu A_2 gehörenden Komplementautomaten A'_2 .
- 2) Bestimme den zu A_1 und A'_2 gehörenden Produktautomaten A' , d.h. einen Automaten für $L(A_1) \setminus L(A_2)$.
- 3) Überprüfe, ob es in A' einen akzeptierenden Zustand gibt, der vom Startzustand aus erreichbar ist, d.h. ob $L(A') = L(A_1) \setminus L(A_2) = \emptyset$ ist:
 - falls ja, gib „ $L(A_1) \not\subseteq L(A_2)$ “ aus;
 - falls nein, gib „ $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ “ aus.

Kapitel 2: Formale Sprachen

Eigenschaften regulärer Sprachen

► Äquivalenzprüfung (Rest)

Bekanntlich gilt für je zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma$:

- $L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$ und $L_2 \subseteq L_1$
- **Abgeleiteter Lösungsalgorithmus**

Eingabe: zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ

Ausgabe: Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) = L(A_2)$ gilt

- 1) Überprüfe mit dem vorigen Unterprogramm, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ gilt
- 2) Überprüfe mit dem vorigen Unterprogramm, ob $L(A_2) \subseteq L(A_1)$ gilt
- 3) Antworte wie folgt:

- Falls nachgewiesen wurde, dass $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ und $L(A_2) \subseteq L(A_1)$ gilt, so gib „ $L(A_1) = L(A_2)$ “ aus,
- andernfalls gib „ $L(A_1) \neq L(A_2)$ “ aus.