Gliederung

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

Die regulären Sprachen über einem Alphabet sind abgeschlossen gegenüber Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplement:

Es seien Σ das zugrunde liegende Alphabet und $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann gilt:

- Die Sprache $L_1 \cup L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $L_1 \cap L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache.
- Die Sprache $co(L_1)$, d.h. $\Sigma^* \setminus L_1$, ist eine reguläre Sprache.

Diese Zusammenhänge kann man nutzen, um Grammatiken bzw. endliche Automaten für „komplexere“ reguläre Sprachen zu konstruieren.

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

Einfache Zusammenhänge

- Die sogenannten De Morganschen Gesetze der Mengenlehre liefern Beziehungen zwischen den Operationen Durchschnitt, Differenz und Komplement bzw. Vereinigung
- und damit auch zwischen Abgeschlossenheitseigenschaften:

Wegen …	folgt Abgeschl. geg. …	aus Abgeschlossenheit gegen …
$L_1 \cup L_2 = co(co(L_1) \cap co(L_2))$	Vereinigung	Komplement und Durchschnitt
$L_1 \cap L_2 = co(co(L_1) \cup co(L_2))$	Durchschnitt	Komplement und Vereinigung
$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap co(L_2)$	Differenz	Komplement und Durchschnitt
$co(L_1) = \Sigma^* \setminus L_1$	Komplement	Differenz (Σ^* ist regulär.)
usw.		

Daher brauchen wir uns hier auch nur z.B. um Komplement und Durchschnitt zu kümmern.

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

Anmerkungen

- Beim Nachweis der Abgeschlossenheit gegen Durchschnitt und Komplement nutzen wir aus, dass es zu jeder regulären Sprache L einen (deterministischen) endlichen Automaten A mit L(A) = L gibt

- Bezüglich des Durchschnitts ist deshalb nur zu zeigen, dass für alle (deterministischen) endlichen Automaten A_1 und A_2 gilt:
  - Es gibt einen (deterministischen) endlichen Automaten A‘ für die Sprache $L(A_1) \cap L(A_2)$.

- Bezüglich des Komplements ist deshalb nur zu zeigen, dass für alle (deterministischen) endlichen Automaten A_1 gilt:
  - Es gibt einen (deterministischen) endlichen Automaten A‘ für die Sprache $\Sigma^* \setminus L(A_1)$.

Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

- Einschub: Vereinigung regulärer Sprachen auch *direkt* berechenbar, – ohne den Umweg über Durchschnitt und Komplement – nämlich (besonders leicht) anhand der *Grammatiken.* Ein Beispiel:

  - Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
  - Es sei $L_1 = \{ v \circ 11 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$
  - Es sei $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ enthält gerade viele 0‘en und $|w| > 0 \}$

$$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$$
$$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1 \mid 1B_1$$
$$B_1 \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0B_1 \mid 1B_1$$

$$S_2 \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$$
$$A_2 \rightarrow 0 \mid 0B_2 \mid 1A_2$$
$$B_2 \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$$

  - Eine reguläre Grammatik für $L_1 \cup L_2$ enthält alle obigen Regeln und die folgenden neuen Regeln, wobei S das Startsymbol ist

$$S \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$$
$$S \rightarrow 0A_2 \mid 1 \mid 1B_2$$

allgemeines Rezept überlegen …

Operation: Durchschnitt (Beispiel)

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 10 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.
- Es sei $L_2 = \{ v \circ 01 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

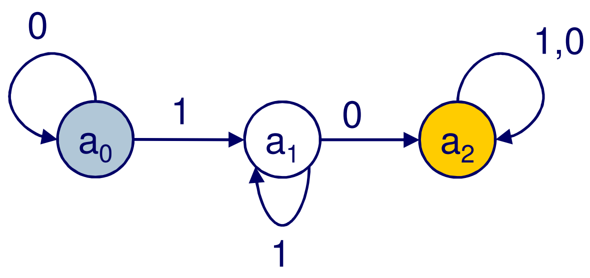
Frage: *Ist die Sprache $L_1 \cap L_2$ auch regulär?*
($L_1 \cap L_2$ enthält alle Wörter aus Σ^*, die sowohl das Teilwort 10 als auch das Teilwort 01 enthalten.)

Operation: Durchschnitt (Automaten-orientierter Ansatz)

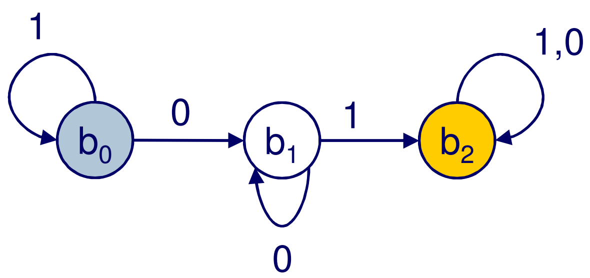
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_1 mit $L(A_1) = L_1$.*
- *Konstruiere einen endlichen Automaten A_2 mit $L(A_2) = L_2$.*
- *Benutze A_1 und A_2, um einen endlichen Automaten $A°$ mit $L(A°) = L_1 \cap L_2$ zu konstruieren.*
  - ***Idee 1**: $A°$ soll nachvollziehen, wie A_1 und A_2 gleichzeitig eine Zeichenfolge abarbeiten.*
  - ***Idee 2**: Ein Wort liegt genau dann in $L_1 \cap L_2$, wenn es von A_1 **und** A_2 akzeptiert wird.*

Operation: Durchschnitt (Beispiel (weiter))

$A_1 = [Z_1,\Sigma,a_0,F_1,\delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$



$A_2 = [Z_2,\Sigma,b_0,F_2,\delta_2]$ mit $L(A_2) = L_2$



$\Longrightarrow$

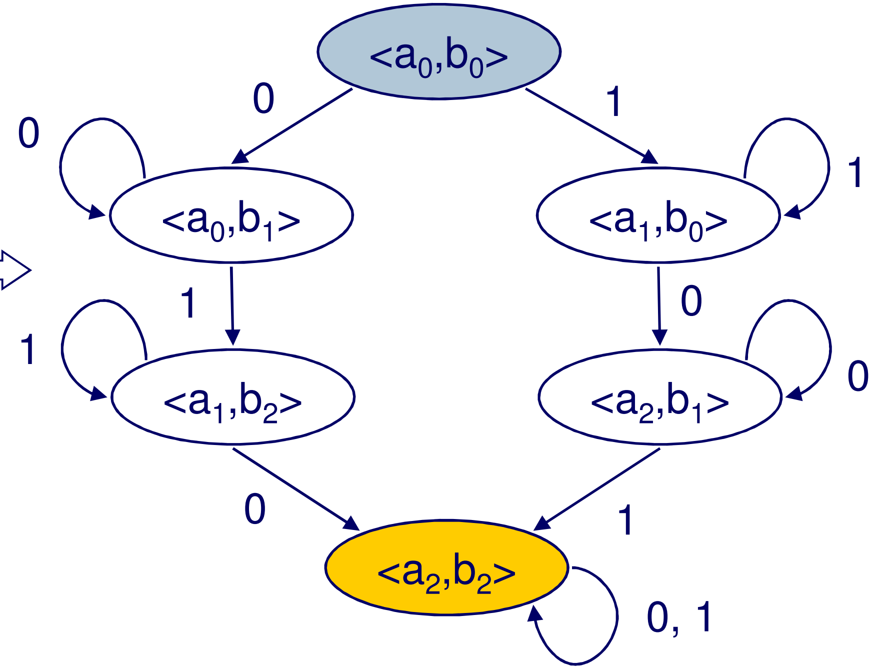
$A° = [Z°,\Sigma°,z°_0,F°,\delta°]$ mit $L(A°) = L_1 \cap L_2$

$Z° \setminus \Sigma$	0	1
$\langle a_0,b_0\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_0,b_2\rangle$	$\langle a_{,0},b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_1,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_0\rangle$
$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$

Operation: Durchschnitt (Beispiel - Erreichbarkeit spart Arbeit)

$$A° = [Z°,\Sigma°,z°_0,F°,\delta°] \text{ mit } L(A°) = L_1 \cap L_2$$

$Z° \setminus \Sigma$	0	1
$<a_0,b_0>$	$<a_0,b_1>$	$<a_1,b_0>$
$<a_0,b_1>$	$<a_0,b_1>$	$<a_1,b_2>$
$<a_0,b_2>$	$<a_{,0},b_2>$	$<a_1,b_2>$
$<a_1,b_0>$	$<a_2,b_1>$	$<a_1,b_0>$
$<a_1,b_1>$	$<a_2,b_1>$	$<a_1,b_2>$
$<a_1,b_2>$	$<a_2,b_2>$	$<a_1,b_2>$
$<a_2,b_0>$	$<a_2,b_1>$	$<a_2,b_0>$
$<a_2,b_1>$	$<a_2,b_1>$	$<a_2,b_2>$
$<a_2,b_2>$	$<a_2,b_2>$	$<a_2,b_2>$



Hinweis: Nicht vom Anfangszustand aus erreichbare Zustände dürfen fehlen.

Operation: Durchschnitt (allgemein)

- Es sei $A_1 = [Z_1,\Sigma,z_0,F_1,\delta_1]$ und $A_2 = [Z_2,\Sigma,y_0,F_2,\delta_2]$ deterministische endliche Automaten mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$.

- Konstruiere den zu A_1 und A_2 gehörenden Produktautomaten $A° = [Z°,\Sigma,z°_0,F°,\delta°]$ mit $L(A°) = L_1 \cap L_2$ wie folgt:

- Setze $Z° := Z_1 \times Z_2$
- Setze $z°_0 := (z_0,y_0)$
- Setze $F° := \{ (z,y) \mid z \in F_1$ und $y \in F_2 \}$.
- Für jedes $(z,y) \in Z°$ und alle $a \in \Sigma$:
  - setze $\delta°((z,y),a) := <\delta_1(z,a),\delta_2(y,a)>$.

Wie beim Potenzmengenautomaten umgeht man auch gerne nicht erreichbare Zustände von vornherein …

Operation: Komplement (Beispiel)

- Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 11 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$,
  d.h. die Sprache aller Wörter mit Teilwort 11.

Frage: Ist die Sprache $co(L_1)$ auch regulär? ($co(L_1)$ enthält alle Wörter aus Σ^*, in denen das Teilwort 11 nicht vorkommt.)

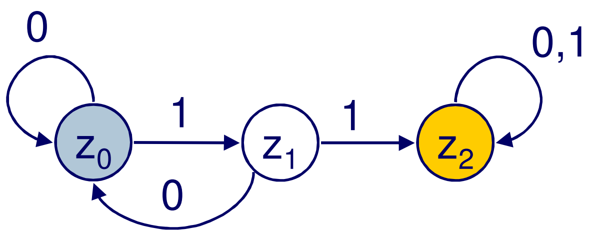
Operation: Komplement (Idee)

- *Konstruiere einen endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$.*
- *Benutze A, um einen endlichen Automaten A° mit $L(A°) = co(L_1)$ zu konstruieren.*
  - ***Idee** : A° soll genau dann akzeptieren, wenn A **nicht** akzeptiert, d.h. wenn man sich gewissermaßen in A bewegt, aber genau in den Zuständen außerhalb F (von A) akzeptiert.*

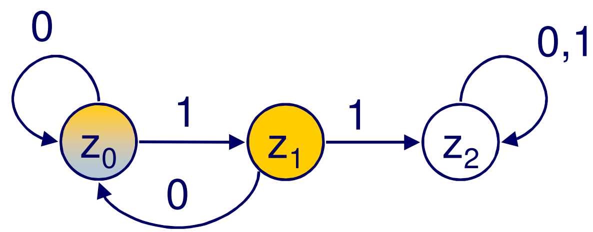
▶ Operation: Komplement (Beispiel (weiter))

- Es sei $\Sigma = \{ 0{,}1 \}$.
- Es sei $L_1 = \{ v \circ 11 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

$A = [Z,\Sigma,z_0,F,\delta]$ mit $L(A) = L_1$



$A° = [Z,\Sigma,z_0,F°,\delta]$ mit $L(A°) = co(L_1)$



$F° = Z \setminus F$ – erledigt!

... A° nennt man den Komplementautomaten von A_1

Operation: Komplement (allgemein)

- Sei $A = [Z,\Sigma,z_0,F,\delta]$ ein (deterministischer) endlicher Automat für L_1.
- Definiere den zu A_1 gehörenden Komplementautomaten $A' = [Z,\Sigma,z_0,F',\delta]$ wie folgt:
  - Setze $F' := \{ z \mid z \notin F \} = Z \setminus F$
- Da die Mengen $K_A(z)$ eine Klasseneinteilung auf Σ^* definieren und $L(A)$ die Vereinigung aller Mengen $K_A(z)$ mit $z \in F$ ist, folgt sofort, dass $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$ gilt.

- Operation: Differenz (Beispiel für Konstruktion in 2 bekannten Schritten)

  - Es sei $\Sigma = \{ 0,1 \}$.
  - Es sei $L_1 = \{ v \circ 10 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.
  - Es sei $L_2 = \{ v \circ 01 \circ w \mid v, w \in \Sigma^* \}$.

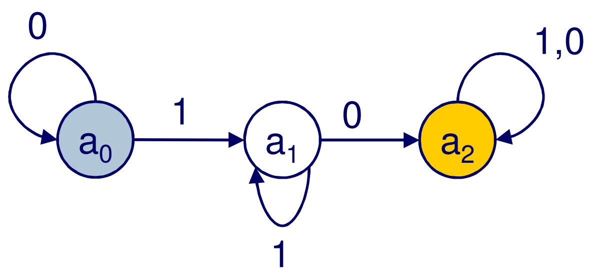
Frage: *Ist die Sprache $L_1 \setminus L_2$ auch regulär? ($L_1 \setminus L_2$ enthält alle Wörter aus Σ^*, die das Teilwort 10 enthalten und das Teilwort 01 nicht enthalten.)*

- Operation: Differenz (Idee)

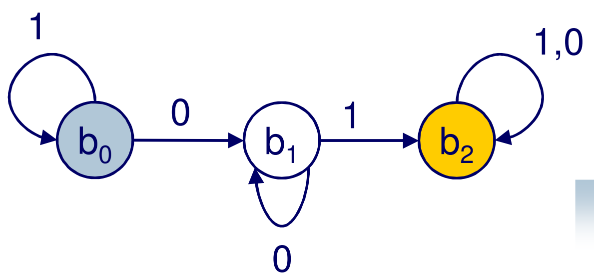
  - *Konstruiere einen endlichen Automaten A_1 mit $L(A_1) = L_1$.*
  - *Konstruiere einen endlichen Automaten A_2 mit $L(A_2) = L_2$.*
  - *Benutze A_2 um einen endlichen Automaten A_3 mit $L(A_3) = co(L_2)$ zu konstruieren.*
  - *Benutze A_1 und A_3, um einen endlichen Automaten $A°$ mit $L(A°) = L_1 \cap co(L_2) = L_1 \setminus L_2$ zu konstruieren.*

▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$A_1 = [Z_1,\Sigma,a_0,F_1,\delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$

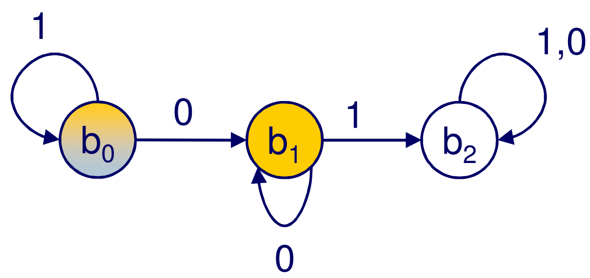


$A_2 = [Z_2,\Sigma,b_0,F_2,\delta_2]$ mit $L(A_2) = L_2$



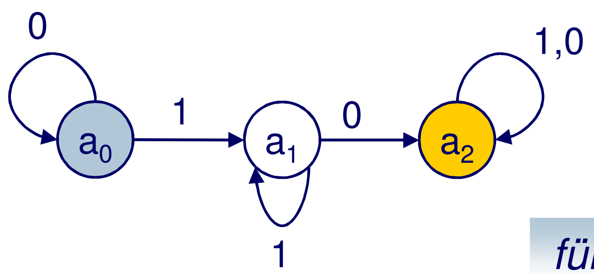
⇒ *für Komplement*

$A_3 = [Z_3,\Sigma,b_0,F_3,\delta_3]$ mit $L(A_3) = co(L_2)$

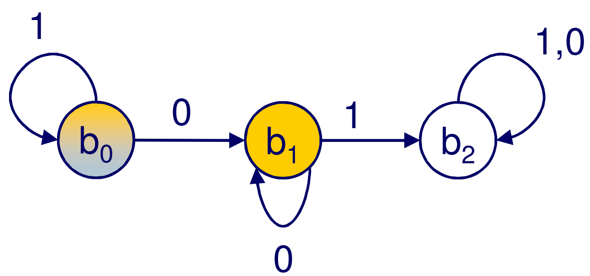


Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$A_1 = [Z_1,\Sigma,a_0,F_1,\delta_1]$ mit $L(A_1) = L_1$



$A_3 = [Z_3,\Sigma,b_0,F_3,\delta_3]$ mit $L(A_3) = co(L_2)$



für Durchschnitt

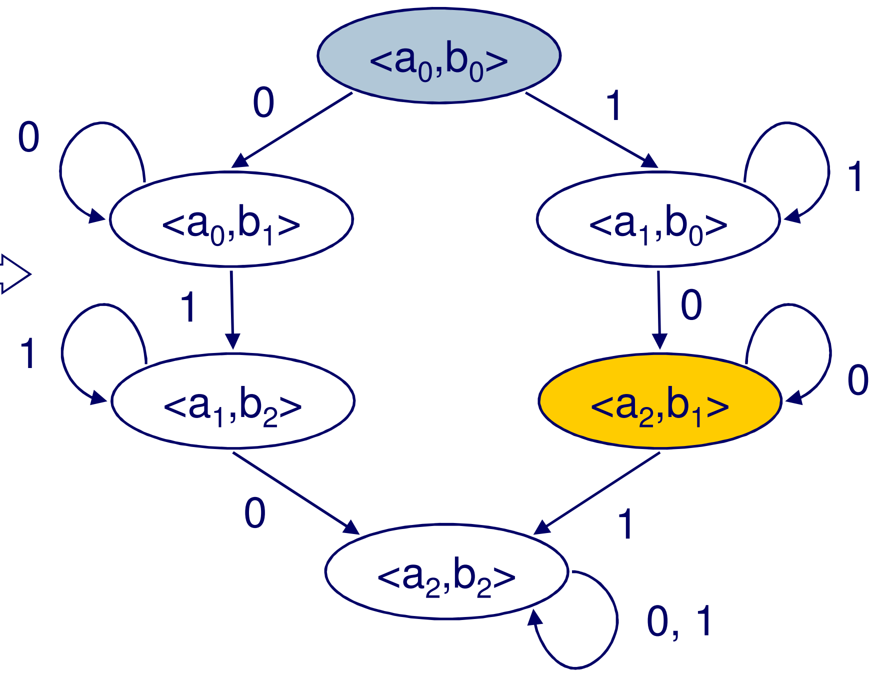
$A° = [Z°,\Sigma°,z°_0,F°,\delta°]$ mit $L(A°) = L_1 \cap co(L_2)$

$Z°/\Sigma$	0	1
$\langle a_0,b_0\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_0,b_2\rangle$	$\langle a_0,b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_1,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_0\rangle$
$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$

▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$$A° = [Z°,\Sigma°,z°_0,F°,\delta°] \text{ mit } L(A°) = L_1 \cap co(L_2) = L_1 \setminus L_2$$

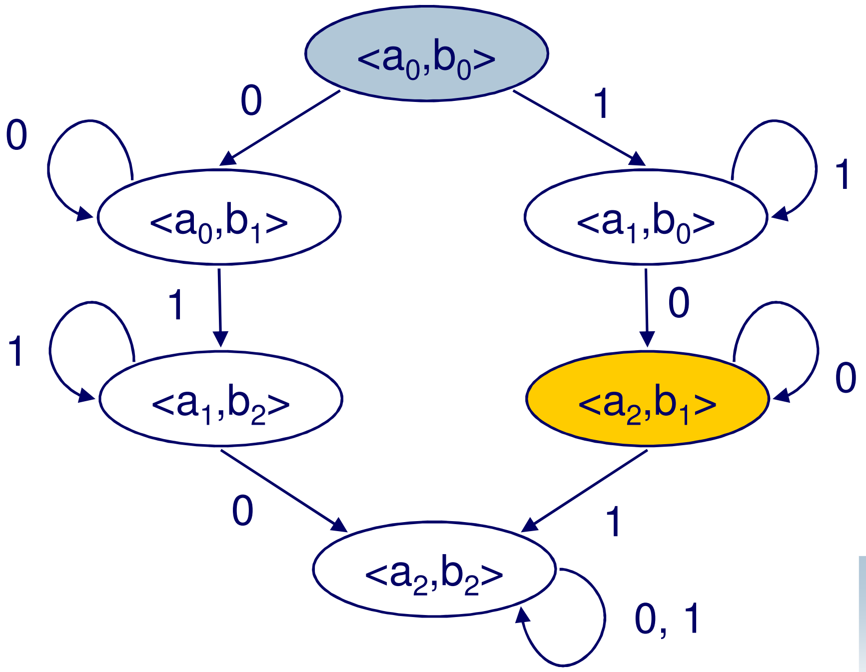
$Z°/\Sigma$	0	1
→ $\langle a_0,b_0\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_0,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_0,b_2\rangle$	$\langle a_{,0},b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_0\rangle$
$\langle a_1,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_1,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_0\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_0\rangle$
$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$
$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$



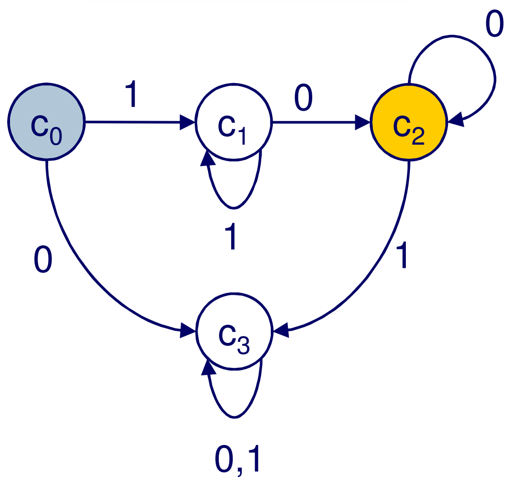
Hinweis: Nicht vom Anfangszustand aus erreichbare Zustände dürfen fehlen.

▶ Operation: Differenz (Beispiel (cont.))

$$A° = [Z°,\Sigma°,z°_0,F°,\delta°] \text{ mit } L(A°) = L_1 \cap co(L_2) = L_1 \setminus L_2$$



*... minimiert **



** mittels „Klassentabellen-Algorithmus“ oder direkt Restsprachen K(z) ablesen und ggf. Zustände zusammenlegen:*
$K(a_0b_1) = K(a_1b_2) = K(a_1b_2) = \{0,1\}^*$!

Äquivalenzprüfung von Automaten mithilfe von Abgeschlossenheitseigenschaften

Die Abgeschlossenheitseigenschaften kann man auch benutzen, um folgende zwei algorithmischen Probleme zu lösen:

Eingabe:	•	zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ
Ausgabe (1):	•	Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$
Ausgabe (2):	•	Antwort auf die Frage, ob A_1 und A_2 äquivalent sind, d.h. *dieselbe Sprache* akzeptieren.

(2) dann ohne Minimalautomaten! (aber nicht unbedingt schneller):

- *Ist (1) gelöst, dann kann (2) leicht beantwortet werden:*
  A_1 und A_2 sind äquivalent gdw. $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ ***und*** *$L(A_2) \subseteq L(A_1)$.*

▶ Äquivalenzprüfung (weiter: $L_1 \subseteq L_2$)

Wegen der De Morgan'schen Gesetze gilt für je zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma$:

- $L_1 \subseteq L_2 \iff L_1 \cap co(L_2) = L_1 \setminus L_2 = \varnothing$
- **Abgeleitetes (Unter-)Programm**

Eingabe: zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ

Ausgabe: Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ oder nicht

1) Bestimme den zu A_2 gehörenden Komplementautomaten A'_2.
2) Bestimme den zu A_1 und A'_2 gehörenden Produktautomaten A', d.h. einen Automaten A' für $L(A_1) \setminus L(A_2)$.
3) Überprüfe, ob es in A' einen akzeptierenden Zustand gibt, der vom Startzustand aus erreichbar ist, d.h. ob $L(A') = L(A_1) \setminus L(A_2) = \varnothing$ ist:
   - falls ja, gib „$L(A_1) \not\subseteq L(A_2)$" aus;
   - falls nein, gib „$L(A_1) \subseteq L(A_2)$" aus.

Äquivalenzprüfung ohne Minimalautomaten (Rest: $L_1 = L_2$)

Bekanntlich gilt für je zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma$:

- $L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$ und $L_2 \subseteq L_1$
- **Abgeleiteter Lösungsalgorithmus**

Eingabe: zwei (deterministische) endliche Automaten A_1 und A_2 mit demselben Eingabealphabet Σ

Ausgabe: Antwort auf die Frage, ob $L(A_1) = L(A_2)$ gilt

1) Überprüfe mit dem vorigen Unterprogramm, ob $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ gilt
2) Überprüfe mit dem vorigen Unterprogramm, ob $L(A_2) \subseteq L(A_1)$ gilt
3) Antworte wie folgt:
   - Falls nachgewiesen wurde, dass $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ **und** $L(A_2) \subseteq L(A_1)$ gilt, so gib „$L(A_1) = L(A_2)$“ aus,
   - andernfalls gib „$L(A_1) \neq L(A_2)$“ aus.