

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Der **CYK-Algorithmus** (Cocke/Younger/Kasami) erlaubt eine recht schnelle Prüfung, ob ein vorgelegtes Wort von einer gegebenen CNF-Grammatik (d.h. kontextfrei in **Chomsky-Normalform**) erzeugt werden kann. Schneller als mit CYK geht es, wenn die Sprachzugehörigkeit von einem deterministischen Kellerautomaten entschieden werden kann, was aber nicht immer der Fall ist.

Chomsky-Normalform bedeutet, dass jede Regel eine der beiden folgenden Formen hat:

- $X \rightarrow x$
- $X \rightarrow YZ$

mit

- **Nichtterminalzeichen** (Hilfssymbolen) X, Y, Z und
- **Terminalzeichen** (Konstanten, Symbolen aus dem Alphabet der Sprache) x .

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Schön ist:

Zu jeder kontextfreien Grammatik **existiert eine CNF-Grammatik**, die die **gleiche Sprache** erzeugt, und man kann diese CNF-Grammatik in vier Schritten **erzeugen**. Dies soll hier an einem Beispiel demonstriert werden.

Übrigens:

Zum hier verwendeten Algorithmus gibt es funktionierende **Varianten** – aber auch nicht funktionierende, die also nicht CNF produzieren oder eine Grammatik mit anderer Sprache. Letztere werden leider oft von Klausurteilnehmern erfunden und verwendet. Es empfiehlt sich, stattdessen eine funktionierende zu lernen.

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid C & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ C \rightarrow D \mid E \mid aDb & E \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

(kurz für $S \rightarrow Db$, $S \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ usw.)

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$S \rightarrow Db \mid C$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

$C \rightarrow D \mid E \mid aDb$

$E \rightarrow S \mid Db$

Schritt 1: Beseitigung von **Nichtterminal-Zyklen** $X \rightarrow \dots \rightarrow X$
(ohne Veränderung der Sprache)

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$S \rightarrow Db \mid C$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$C \rightarrow D \mid E \mid aDb$$
$$E \rightarrow S \mid Db$$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid C & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ C \rightarrow D \mid E \mid aDb & E \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$S \rightarrow Db \mid C$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

$C \rightarrow D \mid E \mid aDb$

$E \rightarrow S \mid Db$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

aha: $S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow S$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid C & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ C \rightarrow D \mid E \mid aDb & E \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

$$S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow S$$

Schritt 1b: Zyklusvariablen gleich benennen: C und E \rightsquigarrow S

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid C & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ C \rightarrow D \mid E \mid aDb & E \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

$$S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow S$$

Schritt 1b: Zyklusvariablen gleich benennen: C und E \rightsquigarrow S

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid S & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ S \rightarrow D \mid S \mid aDb & S \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln der kontextfreien Ausgangsgrammatik (Start mit S):

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid C & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ C \rightarrow D \mid E \mid aDb & E \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Schritt 1: Beseitigung von Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

Schritt 1a: Suche nach Nichtterminal-Zyklen $X \rightarrow \dots \rightarrow X$

$$S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow S$$

Schritt 1b: Zyklusvariablen gleich benennen: C und E \rightsquigarrow S

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow Db \mid S & D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \\ S \rightarrow D \mid S \mid aDb & S \rightarrow S \mid Db \end{array}$$

Schritt 1c: Zusammenfassen (S-Regeln!) und $S \rightarrow S$ streichen

$$\begin{array}{l} S \rightarrow Db \mid D \mid aDb \\ D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \end{array}$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Schritt 2a: Suche nach Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Schritt 2a: Suche nach Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Schritt 2a: Suche nach Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

aha: $S \rightarrow D$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$S \rightarrow Db \mid D \mid aDb$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Schritt 2a: Suche nach Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

$S \rightarrow D$

Schritt 2b: rechte Seite (D)

durch ihre rechten Seiten ($aDb \mid ab \mid b \mid c$) ersetzen
(*sonst nichts*, z.B. *nicht* D-Regel wegwerfen!)

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Db \mid D \mid aDb \\ D &\rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \end{aligned}$$

Schritt 2: Beseitigung von Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

Schritt 2a: Suche nach Nichtterminal-Umwegen $X \rightarrow Y$

$$S \rightarrow D$$

Schritt 2b: rechte Seite (D)
durch ihre rechten Seiten ($aDb \mid ab \mid b \mid c$) ersetzen
(*sonst nichts*, z.B. *nicht* D-Regel wegwerfen!)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c \mid aDb \\ D &\rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c \end{aligned}$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

aha: Db, aDb, ab

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Db, aDb, ab

Schritt 3b: Jedes dortige Terminal x (hier **a,b**) durch ein neues Nonterminal X ersetzen

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Db, aDb, ab

Schritt 3b: Jedes dortige Terminal x (hier **a,b**) durch ein **neues** Nonterminal X ersetzen

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow Db \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“
aDb, ab

Schritt 3b: Jedes dortige Terminal x (hier a,b) durch ein neues Nonterminal X ersetzen

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$

Schritt 3c: und $X \rightarrow x$ ergänzen:

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 2:

$$S \rightarrow DB \mid aDb \mid ab \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$$

Schritt 3: Beseitigung von rechten Seiten „Terminal x plus mehr“

Schritt 3a: Suche nach rechten Seiten „Terminal x plus mehr“
aDb, ab

Schritt 3b: Jedes dortige Terminal x (hier a,b) durch ein neues Nichtterminal X ersetzen

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$A \rightarrow a, B \rightarrow b$$

Schritt 3c: und $X \rightarrow x$ ergänzen:

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a, B \rightarrow b$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$A \rightarrow a, B \rightarrow b$$

Schritt 4: Beseitigung von **rechten Seiten länger als 2**

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$A \rightarrow a, B \rightarrow b$$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$S \rightarrow DB \mid \mathbf{ADB} \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow \mathbf{ADB} \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a, B \rightarrow b$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$S \rightarrow DB \mid \mathbf{ADB} \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow \mathbf{ADB} \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a, B \rightarrow b$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2:
aha: ADB

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a, B \rightarrow b$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2: ADB

Schritt 4b: In abnehmender Länge für deren echte Präfixe
Nichtterminale zwischenschalten

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a, B \rightarrow b$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2: ADB

Schritt 4b: In abnehmender Länge für deren echte Präfixe
Nichtterminale zwischenschalten: hier $F \rightarrow AD$ dazu
und AD rechts durch F ersetzen

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

Regeln nach Schritt 3:

$$S \rightarrow DB \mid ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow ADB \mid AB \mid b \mid c$$
$$A \rightarrow a, B \rightarrow b$$

Schritt 4: Beseitigung von rechten Seiten länger als 2

Schritt 4a: Suche nach rechten Seiten länger als 2: ADB

Schritt 4b: In abnehmender Länge für deren echte Präfixe Nichtterminale zwischenschalten: hier $F \rightarrow AD$ dazu und AD rechts durch F ersetzen

$$S \rightarrow DB \mid FB \mid AB \mid b \mid c$$
$$D \rightarrow FB \mid AB \mid b \mid c$$
$$A \rightarrow a, B \rightarrow b, F \rightarrow AD$$

Von kontextfrei nach CNF: „Cartoon“

$S \rightarrow DB \mid FB \mid AB \mid b \mid c$

$D \rightarrow FB \mid AB \mid b \mid c$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

$F \rightarrow AD$



hat Chomski-NF &
gleiche Sprache wie ...

$S \rightarrow Db \mid C$

$C \rightarrow D \mid E \mid aDb$

$D \rightarrow aDb \mid ab \mid b \mid c$

$E \rightarrow S \mid Db$