10. Übungsblatt (Aufgabe 1-3 für PVL)
+ freiwillige Wiederholungsaufgaben

Bei allen Turing-Maschinen soll der Anfangszustand z_0 und der Endzustand z_e heißen. Für zunehmend viele Befehle gibt es abnehmend viele Punkte, sonst überprüfe ich wochenlang. Und überhaupt: Überprüfen Sie mal etwas, das (Satz von Rice!) gar nicht entscheidbar ist … ☺

1. Aufgabe (Turing-Maschine)

Schreiben Sie das Programm (Zustandsüberführungsfunktion) einer Turing-Maschine *M*, die

- für jedes $n \in \mathbb{N}$ bei der Eingabe einer Folge von *n* Einsen
- als Ausgabe eine Folge von *n* Einsen gefolgt von *n* Nullen berechnet,

und zwar nach folgender Vorgehensweise: Solange möglich, ersetzt *M* die vorderste 1 durch eine 2 und hängt hinten eine 0 an. Wenn keine 1 mehr da ist, ersetzt *M* jede 2 durch eine 1 und geht zum Wortanfang. Kommentieren Sie jeden Zustand kurz.

Das Programm soll beginnen mit

z0: Erste 1 durch 2 ersetzen, R, z1.
$\delta(z_0,1) = (z_1,2,R)$
z1: Ganz rechts eine 0 dranhängen, z2, L
$\delta(z_1,1) = (z_1,1,R)$
$\delta(z_1,0) = (z_1,0,R)$
$\delta(z_1,B) = (z_2,0,L)$

2. Aufgabe (Turing-Maschine)

a) Beschreiben Sie eine Vorgehensweise für eine Turing-Maschine *M'*, die die in Aufgabe 1 beschriebene Funktion berechnet, auf das Band aber nur 0, 1 oder B schreibt, also insbesondere keine 2 benutzt.

b) Schreiben Sie ein (wiederum kurz kommentiertes) Programm (Zustandsüberführungsfunktion) für *M'*.

3. Aufgabe (Turing-Maschine)

a) Wenn wir die 0-1-Folgen in Aufgabe 1 als binär geschriebene natürliche Zahlen interpretieren, welcher partiellen Funktion auf den natürlichen Zahlen entspricht die Aufgabenstellung für die gesuchte Turing-Maschine, d.h.

   - Auf welchen Zahlen soll sie mindestens definiert sein?
   - Was wird für jede dieser Zahlen berechnet – möglichst einfach ausgedrückt?

b) Geben Sie die Folge der Konfigurationen der Maschine *M* aus Aufgabe 1 bei der Eingabe 1 an.

Übungen Nr. 1- 6 zur Wiederholung – quer durch den Stoff

Sie zählen nicht zur PVL und werden nicht eingereicht.
Vollständigkeit bezüglich der Klausurthemen wird nicht
garantiert, und einige sind umfangreicher als klausurtypisch.

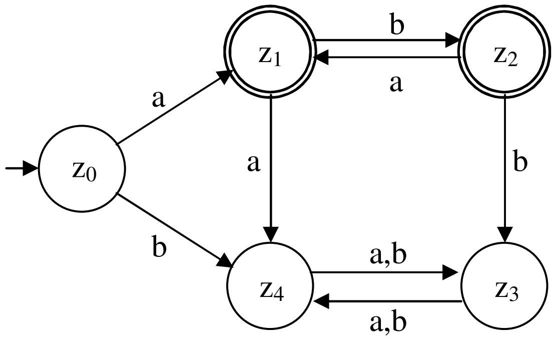
W1. Aufgabe (Automaten und Grammatiken)

Definieren Sie die Sprache $\{a, aaa\}$ mithilfe je eines der folgenden Beschreibungsmittel:

a) deterministischer endlicher Automat,
b) nichtdeterministischer endlicher Automat, der kein deterministischer endlicher Automat ist,
c) reguläre Grammatik,
d) kontextfreie aber nicht reguläre Grammatik,
e) kontextsensitive (nicht verkürzende) aber nicht kontextfreie Grammatik,
f) nicht kontextsensitive (also irgendwo verkürzende) Chomsky-Grammatik.

W2. Aufgabe (Minimalautomat)

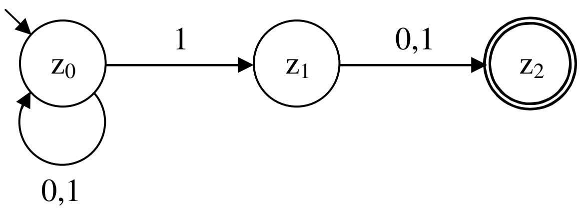
Es sei der folgende endliche deterministische Automat A gegeben:



a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Sprache $L(A)$ unendlich viele Wörter enthält.
b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Minimierungsalgorithmus einen minimalen Automaten B mit $L(B) = L(A)$, und zeichnen Sie den Automaten B.
c) Geben Sie eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(A)$ an.

W3. Aufgabe (Nichtdeterministischer Automat)

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die gleiche Sprache akzeptiert wie der folgende NDA:



Ist der konstruierte Automat minimal?

W4. Aufgabe (Reguläre Sprachen)

Es seien $\Sigma = \{a,b\}$ und $L_1 = \Sigma^* \setminus \{ab\}$

a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L(A) = L_1$ an.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck R über Σ mit $L(R) = L_1$ an.

c) Geben Sie eine Sprache L_2 über Σ an, für die $L_1 \cdot L_2$ nicht regulär ist.
(ohne Begründung, aber erkennbar so, dass die Prüfung auf Zugehörigkeit zur Sprache unbeschränkten Speicher erfordert)

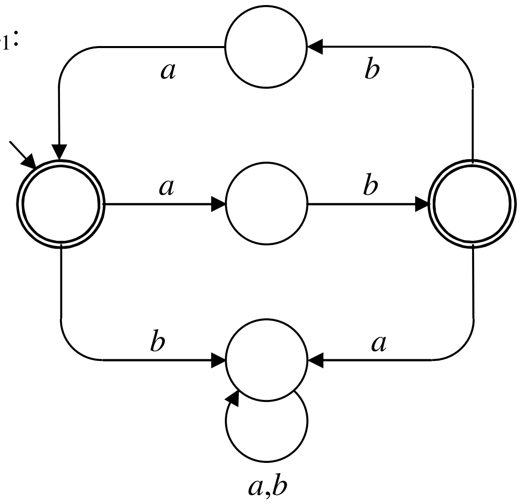
d) Geben Sie eine Sprache L_3 über Σ an, für die $L_1 \cap L_3$ nicht regulär ist.
(mit kurzer Begründung)

W5. Aufgabe (Reguläre Sprachen)

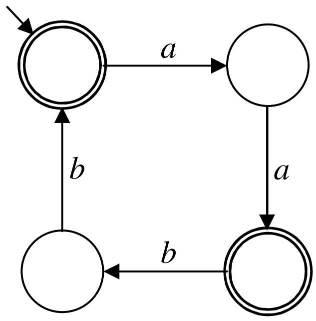
Im Folgenden sind 9 reguläre Sprachen definiert, und zwar durch

- Automaten (deterministische und nichtdeterministische), die sie akzeptieren:

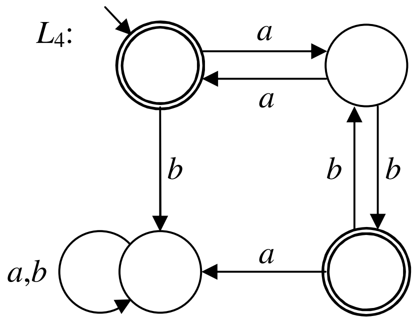
L_1:



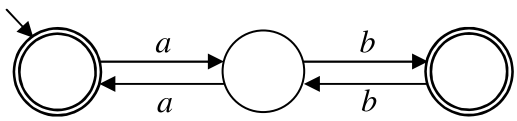
L_2:



L_4:



L_3:



- reguläre Ausdrücke:

L_5: $(aabb)^*(aa+\varepsilon)$
L_6: $(abba)^*(ab+\varepsilon)$

- Chomsky-Grammatiken über $\{a,b\}$ und mit Startsymbol S, die sie erzeugen:

L_7:
$S \to \varepsilon \mid T$
$T \to aA$
$A \to a \mid aT \mid b \mid bB$
$B \to bA$

L_8:
$S \to \varepsilon \mid T$
$T \to aA$
$A \to a \mid aB$
$B \to bC$
$C \to b \mid bT$

L_9:
$S \to \varepsilon \mid T$
$T \to aA$
$A \to b \mid bB$
$B \to bC$
$C \to a \mid aT$

Schreiben Sie jede Sprachbezeichnung (L_2, …, L_9) in genau eine der unteren Boxen, und zwar so, dass jeweils identische Sprachen in der gleichen Box und unterschiedliche Sprachen in verschiedenen Boxen stehen. Evtl. bleiben Boxen leer.

Tipp: Welche drei bis vier kürzesten Wörter werden jeweils akzeptiert bzw. produziert?

L_1

W6. Aufgabe (Restsprachenautomat)

Sei L die Sprache aller Wörter über $\Sigma = \{ab\}$, die nirgendwo zwei aufeinanderfolgende a enthalten, d.h. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{es gibt keine } u,v \in \{a,b\}^* \text{ mit } w = u \circ aa \circ v\}$.

a) Zeichnen Sie einen endlichen Automaten für L mit möglichst wenigen Zuständen.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für L an.

c) Tragen Sie reguläre Ausdrücke so in die Zustände des Automaten aus (a) ein, dass Sie den Restsprachenautomat von L erhalten.