2. Übungsblatt

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen nicht abzählbar sind:

- die Potenzmenge $2^{I\!N}$ der natürlichen Zahlen
  (Mengen als 0-1-Ketten codieren und Cantors Diagonalverfahren verwenden!),
- die Menge M aller Sprachen über dem Alphabet $\{a\}$
  (bijektive Abbildung(en) verwenden!).

2. Aufgabe

Angenommen, Sie verfügen über einen Algorithmus A_1, der die Anzahl unterschiedlicher natürlicher Zahlen in einer beliebigen endlichen Folge solcher Zahlen ermittelt, so dass z.B.

$A_1(1, 22, 333, 1, 333, 22) = 3$

berechnet wird. Sie müssen nicht wissen, wie A_1 im Inneren funktioniert.
Sei ABC das 26-buchstabige Alphabet {A, B, …, Z}. Verwenden Sie nun A_1, um einen Algorithmus A_2 zu konstruieren, der die Anzahl unterschiedlicher Wörter über ABC in einer beliebigen endlichen Folge solcher Wörter ermittelt, z.B.

A_2(WIE, MACHT, MAN, DAS, KEINE, AHNUNG, WIE, DAS, GEHT) = 7.

Tipp: Verwenden Sie den sogenannten Fundamentalsatz der Arithmetik und reduzieren Sie A_2 auf A_1 mittels einer Umformung A_3, die z.B. errechnet:

$A_3(\text{AB}, \text{BAD}) = (2^1\cdot 3^2, 2^2\cdot 3^1\cdot 5^4) = (18,7500)$

Beschreiben Sie A_3 in natürlicher oder Pseudoprogrammiersprache.

3. Aufgabe

Es seien $\Sigma = \{a,b\}$ und $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ die wie folgt definierten Sprachen:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält genau ein a und genau ein $b\}$,
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält mindestens ein a und mindestens ein b $\}$.
- $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält mindestens ein a und höchstens ein b $\}$.

Geben Sie endliche Automaten A_1, A_2 und A_3 mit $L(A_i) = L_i$ an.

4. Aufgabe

Es sei $\Sigma = \{0,1\}$. Ferner seien die Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ wie folgt definiert:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält das Teilwort $101\}$,
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ hat das Präfix 10 und das Suffix $01\}$.

Geben Sie endliche Automaten A_1 und A_2 mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$ an.

Hinweise: Wie lautet das kürzeste Wort der Sprache L_2?

5. Aufgabe

Es sei $\Sigma = \{0,1\}$. Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $nat(w)$ die natürliche Zahl, deren Binärdarstellung bis auf führende Nullen mit w übereinstimmt – z.B. $nat(11) = nat(0011) = 3$, wobei $nat(\varepsilon) = nat(0) = 0$.

Geben Sie einen endlichen Automaten A an, für den $L(A)$ genau alle Zeichenketten w über dem Alphabet Σ enthält, bei denen $nat(w)$ eine durch 6 teilbare Zahl ist.

Tipp: Betrachten Sie die Wirkung auf den Wert einer Binärzahl, wenn man an sie 0 oder 1 anhängt, und denken Sie an Restklassen bei Division durch 6, d.h. die Menge der Zahlen mit Rest 0, 1, ..., 5.

6. Aufgabe

Es sei A der unten dargestellte endliche Automat. Bestimmen Sie die Mengen $K_A(z_0)$, $K_A(z_1)$, $K_A(z_2)$, $K_A(z_3)$ und $K_A(z_4)$.

Tipp: … am besten in genau dieser Reihenfolge.