2. Übungsblatt

1. Aufgabe (Sprachen – Begriffe)

Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, wenn die A's beliebige Alphabete und die L's beliebige Sprachen sind? Bitte begründen Sie kurz Ihre vier Entscheidungen.

a) $(A_1{}^* A_2{}^*)^* = (A_1 \cup A_2)^*$

b) $\{\varepsilon\}L = \varnothing L$

c) $L_2 L_1 \subseteq L_1{}^* L_2{}^* L_1{}^* L_2{}^*$

d) $abcd \in (\{a\}\{cd\}^*\{b\})^*$

2. Aufgabe (Sprachen – induktive Definition)

a) Die folgenden Regelsätze i, ii und iii definieren induktiv die Sprachen L_{i}, L_{ii}, L_{iii}. In welchen Fällen ist das die Sprache L der $w \in \{0,1\}^*$ mit gleich vielen 0en und 1en?

i. (1) $\varepsilon \in L_{\text{i}}$ (2) Ist $w \in L_{\text{i}}$, dann gilt auch $0 \circ w \circ 1 \in L_{\text{i}}$ und $1 \circ w \circ 0 \in L_{\text{i}}$.

ii. (1) $\varepsilon \in L_{\text{ii}}$ (2) $10 \in L_{\text{ii}}$ (3) $01 \in L_{\text{ii}}$ (4) Ist $\{u,v\} \subseteq L_{\text{ii}}$, dann gilt $u \circ v \in L_{\text{ii}}$.

iii. (1) $\varepsilon \in L_{\text{iii}}$ (2) Ist $\{u,v\} \subseteq L_{\text{iii}}$, dann gilt auch $0 \circ u \circ 1 \in L_{\text{iii}}$, $1 \circ u \circ 0 \in L_{\text{iii}}$ und $u \circ v \in L_{\text{iii}}$.

b) Welche der folgenden Wörter können durch i bzw. ii bzw. iii **nicht** erzeugt werden?
(α) 111000 (β) 101010 (γ) 101100

Beweise werden nicht verlangt.

Tipps: Produzieren Sie die ersten paar Wörter jeder Sprache.
Werden durch den Regelsatz besondere Zusammenhänge zwischen aufeinanderfolgenden Symbolen oder erstem und letztem Symbol erzwungen?

3. Aufgabe (Relationen)

Nennen Sie für jede der 8 Kombinationen (Teilmengen der Menge) der Eigenschaften

- reflexiv
- transitiv
- symmetrisch

ein Beispiel für eine Relation R über einer möglichst kleinen Menge natürlicher Zahlen, welche genau die Eigenschaften aus der Kombination hat.

4. Aufgabe (unendliche Mengen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:

- die Menge Z aller ganzen Zahlen,
- die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Aufgabe (Äquivalenzrelationen) [freiwillige Zusatzaufgabe, bitte nicht abgeben]

a) Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf der Menge $\{1, 2, 3\}$?

b) Auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 9, 10, 11\}$ gibt es, soweit dem Autor bekannt, 678570 (!) verschiedene Äquivalenzrelationen. Wie viele davon haben einen zusammenhängenden Graphen, d.h. mit Wegen von jedem Knoten zu jedem Knoten?

Die Äquivalenzrelationen zu (a) und (b) sollten Sie jeweils auch alle aufzählen oder zumindest charakterisieren, z.B. durch ihre zugeordnete Partition.