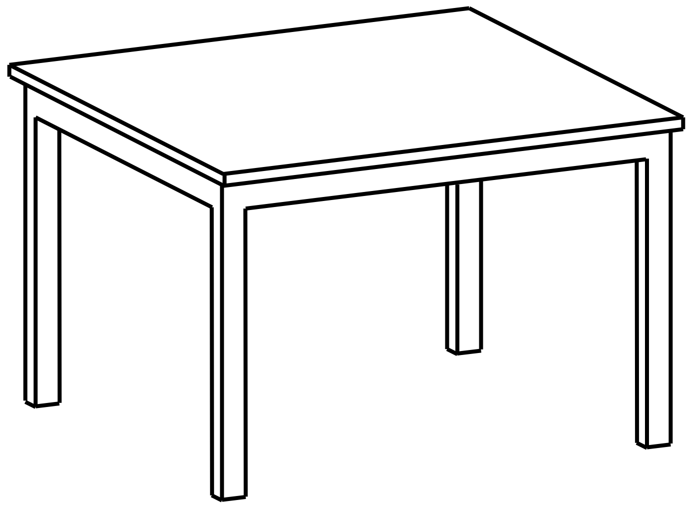
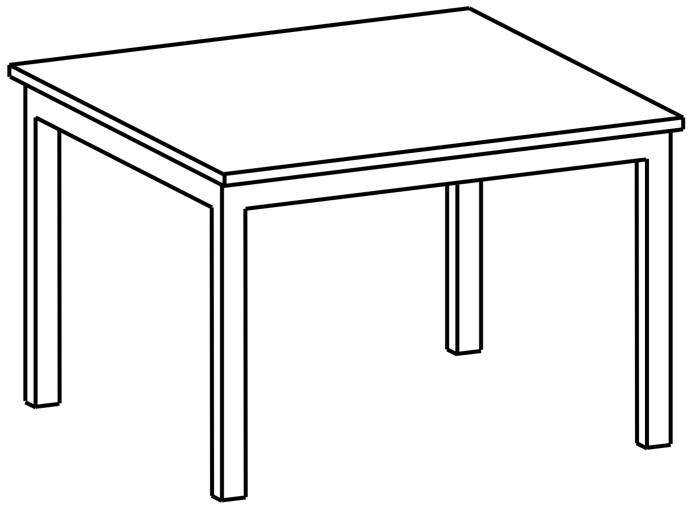
Was haben wackelnde Tische
mit Chomsky-Grammatiken zu tun?

Was haben wackelnde Tische mit Chomsky-Grammatiken zu tun?

Wir beginnen mit einem vierbeinigen Tisch mit quadratischer Platte.

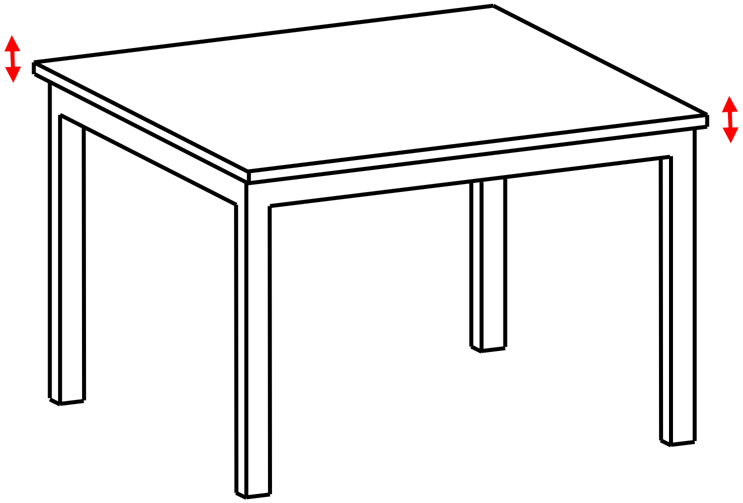


Wir beginnen mit einem vierbeinigen Tisch mit quadratischer Platte.



Er ist perfekt gebaut und stabil. ☺

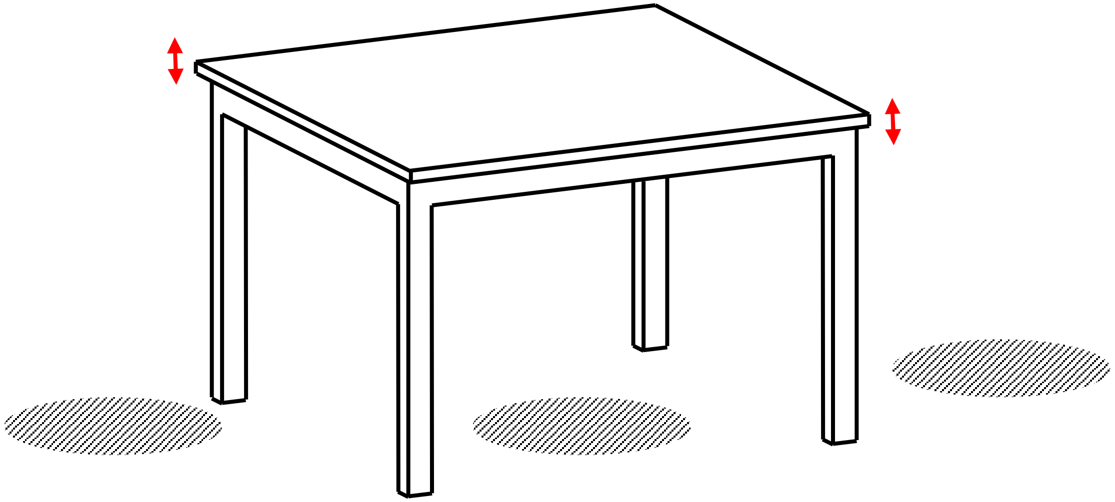
Wir beginnen mit einem vierbeinigen Tisch mit quadratischer Platte.



Er ist perfekt gebaut und stabil. ☺
Leider steht er trotzdem wacklig! ☹

Wieso?

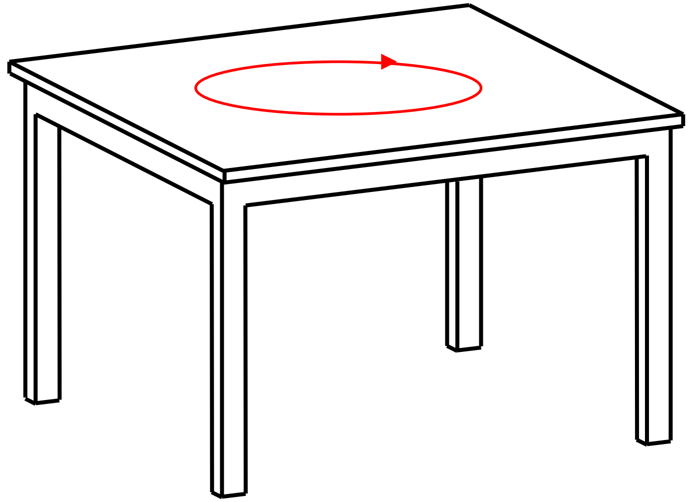
Wir beginnen mit einem vierbeinigen Tisch mit quadratischer Platte.



Er ist perfekt gebaut und stabil. ☺
Leider steht er trotzdem wacklig!☹

Wieso? **– Der Fußboden ist hart und leicht uneben!**

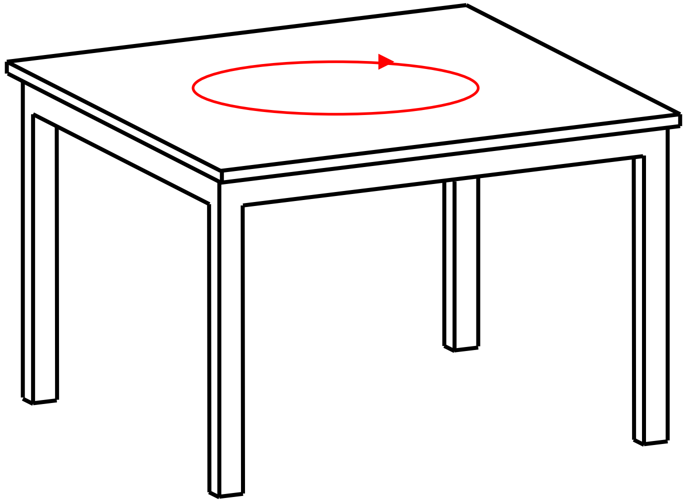
Tröstliche Tatsache:



Wenn man ihn behutsam um seine Mittelachse dreht …
erreicht er bald eine Position, in der er stabil steht!

Warum?

Tröstliche Tatsache:



Wenn man ihn behutsam um seine Mittelachse dreht …
erreicht er bald eine Position, in der er stabil steht!

Warum? – **Das verrät uns die Mathematik (Analysis 1. Semester)!**

Was haben wackelnde Tische
mit Chomsky-Grammatiken zu tun?

Jetzt schauen wir uns eine einfache Chomsky-Grammatik G an:

Alphabet {a,b}
Startsymbol und einzige Variable: S
Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Jetzt schauen wir uns eine einfache Chomsky-Grammatik G an:

Alphabet {a,b}
Startsymbol und einzige Variable: S
Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Man überlegt leicht,
dass alle von G erzeugten Wörter
gleich viele a’s und b’s enthalten.

Das zeigt ein einfacher induktiver Beweis.

Jetzt schauen wir uns eine einfache Chomsky-Grammatik G an:

Alphabet {a,b}
Startsymbol und einzige Variable: S
Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Man überlegt leicht,
dass alle von G erzeugten Wörter
gleich viele a's und b's enthalten.

Das zeigt ein einfacher induktiver Beweis.

Doch wie zeigt man umgekehrt,
dass alle Wörter mit gleich vielen a's und b's
von G erzeugt werden?

Wieso erzeugt die folgende Grammatik G alle Wörter mit gleich vielen a's und b's, also $L(G) = L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$?

Alphabet $\{a,b\}$
Startsymbol und einzige Variable: S
Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Das zeigen wir, indem wir jedes Wort $w \in L$ in der Gegenrichtung der Regeln zerlegen, bis wir bei ε ankommen.

Wieso erzeugt die folgende Grammatik G
alle Wörter mit gleich vielen a's und b's,
also $L(G) = L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$?

Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Die $w \in L$ haben eine gerade Anzahl von Buchstaben.
Solch ein w ist von einer der Formen
1. $v=\varepsilon$ oder 2. avb, 3. bva, 4. ava, 5. bvb mit $v \in \{a,b\}^*$.

Wieso erzeugt die folgende Grammatik G
alle Wörter mit gleich vielen a's und b's,
also $L(G) = L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$?

Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Die $w \in L$ haben eine gerade Anzahl von Buchstaben.
Solch ein w ist von einer der Formen
1. $v=\varepsilon$ oder 2. avb, 3. bva, 4. ava, 5. bvb mit $v \in \{a,b\}^*$.

In den Fällen (1) bis (3) ist $v \in L$.

Jetzt wäre es schön, wenn in den Fällen (4) und (5)
w zerlegt werden könnte als $w = u \circ v$ mit $u,v \in L \setminus \{\varepsilon\}$.

Denn dann kann man jedes w so zerlegen,
dass es genau umgekehrt aus G entsteht!

Wieso erzeugt die folgende Grammatik G
alle Wörter mit gleich vielen a's und b's,
also $L(G) = L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$?

Regeln: $S \to \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

Letzte offene Frage:

Wieso kann jedes $w \in L$ der Form 4. ava bzw. 5. bvb mit $v \in \{a,b\}^*$
zerlegt werden als $w = u \circ v$ mit $L \setminus \{\varepsilon\}$?

Wieso erzeugt die folgende Grammatik G
alle Wörter mit gleich vielen a's und b's,
also $L(G) = L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$?

Regeln: $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

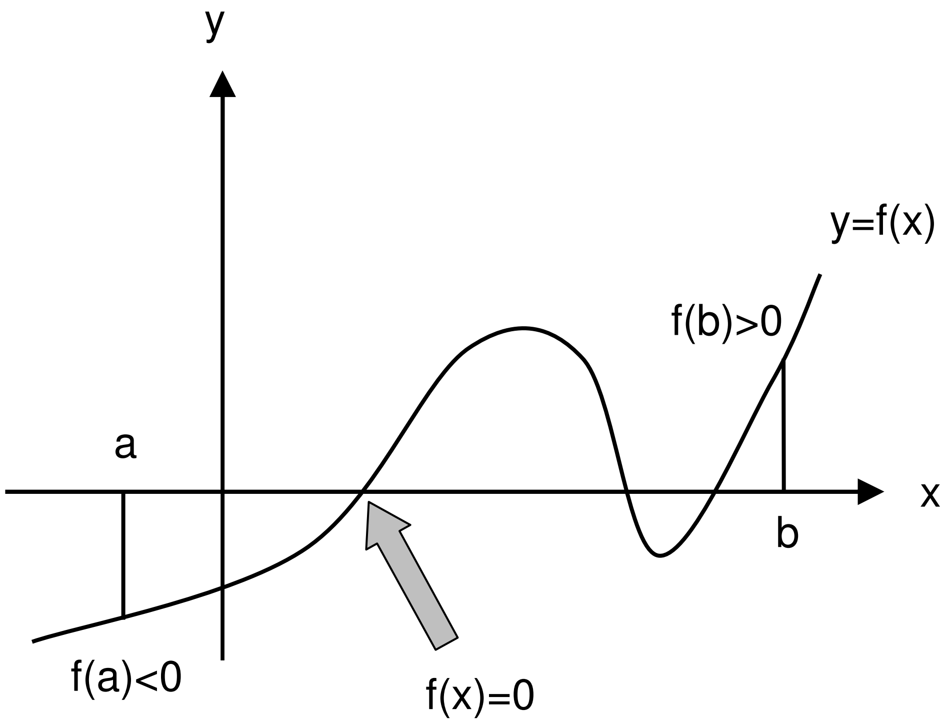
Letzte offene Frage:

Wieso kann jedes $w \in L$ der Form 4. ava bzw. 5. bvb mit $v \in \{a,b\}^*$
zerlegt werden als $w = u \circ v$ mit $L \setminus \{\varepsilon\}$?

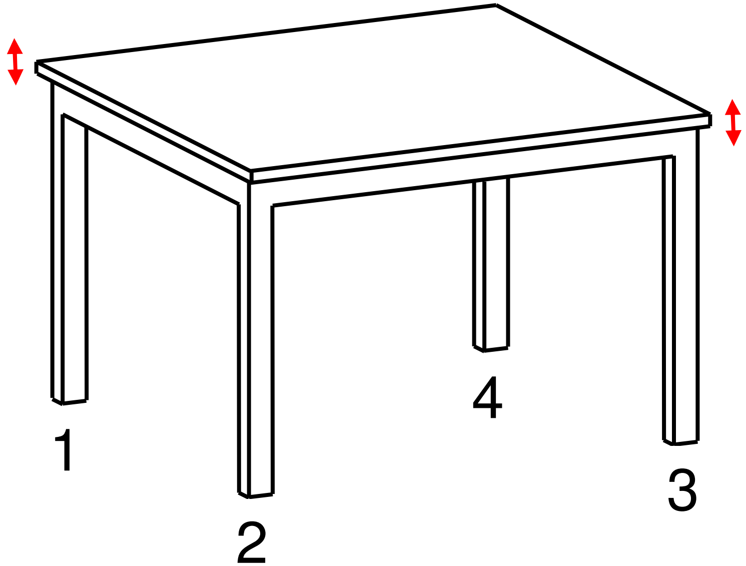
Warum? – **Das verrät uns die Mathematik (Analysis 1. Semester)!**

Der Nullstellensatz für stetige reelle Funktionen

Ist eine Funktion f in einem Intervall [a,b] stetig
und haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen,
dann hat f in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle.



Der Nullstellensatz und der Tisch



f = (Durchschnitt der Höhen der Beine 1 und 3 über dem Boden)
– (Durchschnitt der Höhen der Beine 2 und 4 über dem Boden)

Argument = Drehwinkel

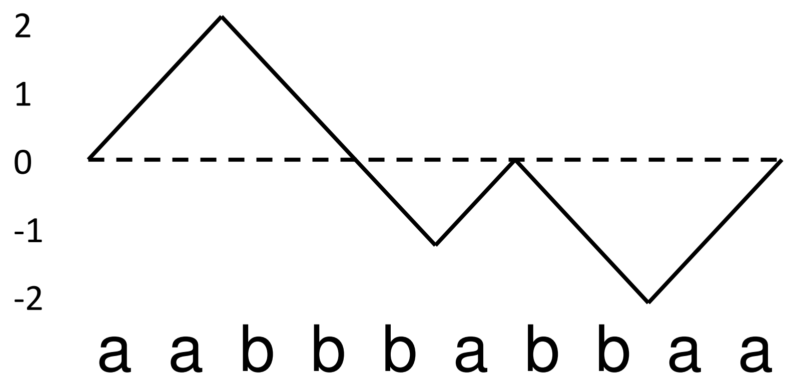
Am Anfang: $f(0°) = h > 0$ (denn z.B. 2&4 auf Boden, 1&3 darüber)

Nach Vierteldrehung: $f(90°) = -h$ (denn jetzt umgekehrt)

Dazwischen: $f(x°) = 0$ – der Tisch wackelt nicht!

Der Nullstellensatz und die Grammatik

Wir zeichnen als Zickzack-Kurve f(Buchstabenzahl), wie „die bisherige Anzahl der a's minus die bisherige Anzahl der b's" verläuft:



Bei $w \in L$ ist $f(0) = f(|w|) = 0$, und umgekehrt.

Falls $w = ava$ ist, ist $f(1) = 1 > 0$ und $f(|w|-1) = -1 = < 0$.   (bvb: analog)

Dazwischen: $f(x) = 0$ –

die ersten x Zeichen von w und der Rest von w sind beide $\in L$!